

گزینه ۲

۱

$$B = \{x \in \mathbb{Z} | x > -5, x < 43\} = \{-4, -3, \dots, 41, 42\}$$

بنابراین مجموعه B متناهی است. سایر گزینه‌ها نامتناهی هستند.

گزینه ۳

۲

نکته: اگر دو نقطه از سهمی دارای عرض یکسان باشند، میانگین طول آن‌ها برابر طول رأس سهمی است.
در این سهمی نقاط $x = 3$ و $x = -1$ دارای عرض یکسان هستند و می‌توانیم طول رأس سهمی را بیابیم:

$$x_S = \frac{3 - 1}{2} = 1$$

همچنین داریم:

$$f(1) = a + b + c$$

از روی شکل داریم:

$$f(x_S) = f(1) = -2 \Rightarrow a + b + c = -2$$

گزینه ۲

۳

اگر تعداد تیم‌ها را x در نظر بگیریم، هر تیم با $x - 1$ تیم دیگر بازی می‌کند. پس $\frac{x(x-1)}{2}$ بازی در رفت و $\frac{x(x-1)}{2}$ بازی در برگشت برگزار می‌شود. در مجموع $x(x-1)$ بازی در رفت و برگشت برگزار می‌شود:

$$x(x-1) = 42 \Rightarrow x^2 - x - 42 = 0 \Rightarrow (x-7)(x+6) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = -6 \end{cases} \text{ غ.ق.ق}$$

گزینه ۲

۴

$$2(1-b) = 2b + b - 3 \Rightarrow 2 - 2b = 3b - 3 \Rightarrow 5b = 5 \Rightarrow b = 1$$

دنباله: $2, 0, -2, -4, \dots$

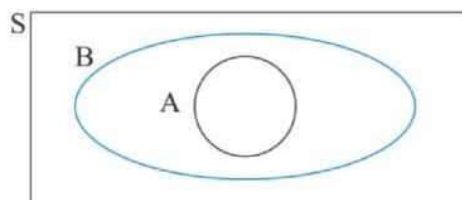
$$t_{10} = t_1 + 9d = 2 + 9 \times (-2) = -16$$

درستی شرط $((A - B) \cup (B - A))' = A \cap B$ را در هریک از گزینه‌ها بررسی می‌کنیم.

گزینه ۱) اگر $A \subseteq B$ باشد، برابری ذکرشده برقرار نیست.

$$((A - B) \cup (B - A))' = (\emptyset \cup (B - A))' = (B - A)'$$

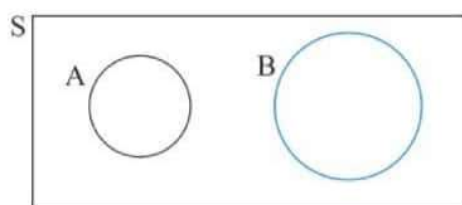
$$A \cap B = A$$



گزینه ۲) اگر $A \subseteq B'$ باشد، برابری ذکرشده برقرار نیست.

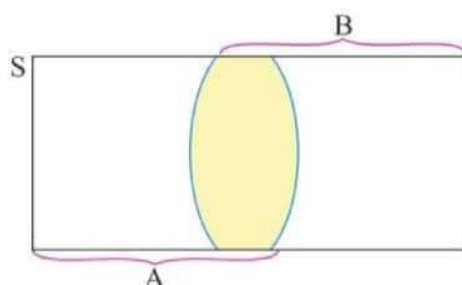
$$((A - B) \cup (B - A))' = (A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$A \cap B = \{ \}$$



گزینه ۳) اگر $A \cup B = S$ باشد، برابری ذکرشده همواره برقرار است.

باتوجه به نمودار زیر متمم مجموعه $(A - B) \cup (B - A)$ قسمت رنگی خواهد شد که با $A \cap B$ برابر است.



گزینه ۴) اگر $A = \emptyset$ ، برابری ذکرشده برقرار نیست.

$$((A - B) \cup (B - A))' = (\emptyset \cup B)' = B'$$

$$A \cap B = \emptyset \cap B = \emptyset$$

به طریق مشابه اگر $B = \emptyset$ ، برابری ذکرشده برقرار نیست.

راه حل دوم:

متمم مجموعه دلخواه A برابر است با: $S - A = A'$

اکنون متمم مجموعه داده شده برابر است با:

$$S - ((A - B) \cup (B - A)) = S - ((A \cup B) - (A \cap B)) = A \cap B$$

$$\Rightarrow S = A \cup B$$

رابطه f در صورتی تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی با مؤلفه‌های اول برابر در آن وجود نداشته باشد یا به عبارت دیگر اگر هم زوج مرتب‌هایی با مؤلفه اول برابر وجود داشت، در این صورت می‌بایست مؤلفه دوم آن‌ها نیز برابر باشد.

$$(۳, ۴) = (۳, ۲kt)$$

$$\Rightarrow ۲kt = ۴ \Rightarrow kt = ۲ \quad (۱) \xrightarrow{(۲, ۱۲) = (kt, k^۲ + t^۲)} k^۲ + t^۲ = ۱۲ \quad (۲)$$

حال باتوجه به اتحاد مربع دوجمله‌ای داریم:

$$(k - t)^۲ = k^۲ + t^۲ - ۲kt \Rightarrow (k - t)^۲ = ۱۲ - ۲ \times ۲ = ۸$$

$$\Rightarrow k - t = \pm \sqrt{۸} \xrightarrow{k > t} k - t = \sqrt{۸} \Rightarrow k - t = ۲\sqrt{۲}$$

حسابان

$$\tan(۳۰۰) \cos(۲۱۰) + \tan(۴۸۰) \sin(۸۴۰)$$

$$= \tan(۳۶۰ - ۶۰) \cos(۱۸۰ + ۳۰) + \tan(۳۶۰ + ۱۲۰) \sin(۷۲۰ + ۱۲۰)$$

$$= \tan(-۶۰) \cos(۱۸۰ + ۳۰) + \tan(۱۸۰ - ۶۰) \sin(۱۸۰ - ۶۰)$$

$$= (-\tan(۶۰))(-\cos(۳۰)) + (-\tan(۶۰)) \sin(۶۰)$$

$$= (-\sqrt{۳})\left(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right) + (-\sqrt{۳})\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right) = \frac{۳}{۲} - \frac{۳}{۲} = ۰$$

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$۱) y = x\sqrt{x^۲ + ۱} \Rightarrow y' = \sqrt{x^۲ + ۱} + \frac{x^۲}{\sqrt{x^۲ + ۱}} = \frac{۲x^۲ + ۱}{\sqrt{x^۲ + ۱}} > ۰$$

$$۲) y = x + \sqrt{x^۲ + ۱} \Rightarrow y' = ۱ + \frac{x}{\sqrt{x^۲ + ۱}} = \frac{\sqrt{x^۲ + ۱} + x}{\sqrt{x^۲ + ۱}} > ۰$$

$$۳) y = \sin ۲x \Rightarrow y' = ۲ \cos ۲x$$

$$۴) y = \cos \frac{x}{۲} \Rightarrow y' = -\frac{۱}{۲} \sin \frac{x}{۲}$$

اگر دو نقطه موردنظر به طول‌های a و b فرض شود، بایستی $f'(a)f'(b) = -۱$ شود که این دو عدد در گزینه‌های ۱ و ۲ ممکن نیست. در گزینه ۴ نیز ممکن نیست، زیرا:

$$\left(-\frac{۱}{۲} \sin \frac{a}{۲}\right)\left(-\frac{۱}{۲} \sin \frac{b}{۲}\right) = -۱ \Rightarrow \sin \frac{a}{۲} \sin \frac{b}{۲} = -۴ \Rightarrow \text{فاقد جواب}$$

اما گزینه ۳ را ببینید:

$$(۲ \cos ۲a)(۲ \cos ۲b) = -۱ \Rightarrow \cos ۲a \cos ۲b = -\frac{۱}{۴} \Rightarrow \text{بی‌شمار جواب}$$

گزینه ۱: تابع $y = f(x)$ در فاصله $(0, 2)$ زیر محور x ها و منفی است، پس $\sqrt{f(x)}$ در این بازه تعریف نشده است و تابع $y = \frac{x-2}{\sqrt{f(x)}}$ ناپیوسته است.

گزینه ۲: تابع $y = \frac{x-2}{\sqrt{f(x)}}$ در $x = 2$ از راست پیوسته است، چراکه:

$$y(2) = \frac{0}{\sqrt{f(2)}} = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{\sqrt{f(x)}} = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0$$

به علاوه در تمام نقاط بازه $(2, 3)$ نیز پیوسته است، پس در فاصله $[2, 3]$ پیوسته می شود.

گزینه ۳: می دانیم $f(3) = 0$ است پس تابع $y = \frac{x-2}{\sqrt{f(x)}}$ در $x = 3$ تعریف شده نیست و ناپیوسته است.

گزینه ۴: تابع $f(x)$ در $x = -3$ از راست پیوسته نیست در نتیجه $\frac{x-2}{\sqrt{f(x)}}$ هم در $x = -3$ پیوستگی راست ندارد و نمی تواند در فاصله $(-3, -2)$ پیوسته باشد.

گام اول

الف) برای یافتن مقدار b ، باید معادله جانب افقی تابع را تعیین کرده و آن را برابر $\frac{3}{2}$ قرار دهیم. برای یافتن معادله جانب افقی از هم ارزی رادیکالی زیر استفاده می کنیم:

$$\sqrt{ax^2 + bx} \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} \sqrt{a}|x + \frac{b}{2a}|, \quad a > 0$$

ب) بررسی می کنیم در کدام یک از حالت های $x \rightarrow +\infty$ یا $x \rightarrow -\infty$ تابع جانب افقی دارد، سپس معادله آن را تعیین می کنیم.

گام دوم

$$\sqrt{ax^2 + bx} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{a}|x + \frac{b}{2a}| = \sqrt{a}(x + \frac{b}{2a})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1 + \sqrt{ax} + \frac{\sqrt{ab}}{2a}) = +\infty$$

پس در حالت $x \rightarrow +\infty$ حاصل حد برابر $+\infty$ شده و تابع جانب افقی ندارد.

$$\sqrt{ax^2 + bx} \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} \sqrt{a}|x + \frac{b}{2a}| = -\sqrt{a}(x + \frac{b}{2a})$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 1 - \sqrt{ax} - \frac{\sqrt{ab}}{2a}) = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} x(2 - \sqrt{a}) + (-1 - \frac{b}{2\sqrt{a}}) = \frac{3}{2}$$

حاصل حد برابر عدد شده است، بنابراین ضریب x باید برابر صفر و مقدار عددی برابر $\frac{3}{2}$ باشد. داریم:

$$2 - \sqrt{a} = 0 \Rightarrow \sqrt{a} = 2 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} a = 4$$

$$-1 - \frac{b}{2\sqrt{a}} = \frac{3}{2} \xrightarrow{a=4} -1 - \frac{b}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{b}{4} = \frac{5}{2} \Rightarrow b = -10$$

برای آنکه $f(x)$ تابعی گویا شود، باید $\sqrt[3]{x}$ از تابع حذف شود، پس $m = 2 \Rightarrow m - 2 = 0$ در نتیجه داریم:

$$f(x) = \frac{x + 2}{2x^2 + x - 3}$$

$$2x^2 + x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow D = \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}, 1\right\}$$

$$2a + b = 2\left(-\frac{3}{2}\right) + 1 = -2$$

تابع $f(x)$ در نقاط غیر صحیح پیوسته و مشتق پذیر است و مشتق آن برابر $2x[x]$ است، زیرا در همسایگی اعداد صحیح $[x]$ حکم یک عدد را دارد.

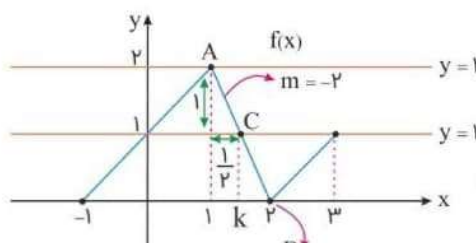
از تابع در $x \rightarrow \pm\infty$ حد می گیریم، سپس از طریق تفکیک کسر، حد را به صورت دقیق تر می نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}, \quad f(x) = \frac{x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}}{2x^2 + x + 1} = \frac{1}{2} + \frac{-\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}}{2x^2 + x + 1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) \Rightarrow \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \frac{1}{2} + 0^- = \left(\frac{1}{2}\right)^- \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \frac{1}{2} + 0^+ = \left(\frac{1}{2}\right)^+ \end{aligned}$$

در $x \rightarrow +\infty$ نمودار تابع زیر خط $y = \frac{1}{2}$ و در $x \rightarrow -\infty$ نمودار در تابع بالای خط $y = \frac{1}{2}$ می باشد، پس "گزینه ۴" درست است.

$y = [f(x)]$ در نقطه ای ناپیوسته بوده و فقط پیوستگی چپ خواهد داشت که $f(x)$ مقدار صحیح به خود گرفته و در این نقطه نزولی باشد.



همان طور که مشخص است، در نقطه C عبارت داخل جزء صحیح، یعنی $f(x)$ ، صحیح شده و نزولی $y = 2$ است. برای تعیین طول نقطه C ، داریم:

$$\begin{aligned} m_{AB} &= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - 2}{3 - 1} = -2 \Rightarrow m_{AC} = -2 \\ \Rightarrow \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} &= \frac{1 - 2}{k - 1} = -2 \Rightarrow k = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\text{مجانِب افقی: } y = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} (3f(2x-1) + 2) = 3 \Rightarrow 3 \lim_{x \rightarrow \infty} f(2x-1) + 2 = 3$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(\overbrace{2x-1}^t) = \frac{1}{3} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{3} : \text{مجانِب افقی (I)}$$

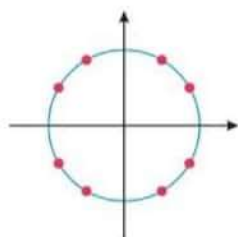
$$\text{مجانِب قائم: } x = -2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} y = \infty : \lim_{x \rightarrow -2} 3f(\overbrace{2x-1}^t) + 2 = \infty \Rightarrow \lim_{t \rightarrow -5} 3f(t) + 2 = \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow -5} f(t) = \infty \Rightarrow x = -5 : \text{مجانِب قائم (II)}$$

پس طبق I و II محل برخورد مجانب‌ها در $y = f(x)$ ، $(-5, \frac{1}{3})$ است و بنابراین محل برخورد مجانب‌ها در $f^{-1}(x)$ ، $(\frac{1}{3}, -5)$ است.

$$\left| \frac{\sin(2x)}{2} \right| - \frac{1}{2} (|\sin(x)| + |\cos(x)|) + \frac{1}{4} = 0$$

$$\Rightarrow \left(|\sin x| - \frac{1}{2} \right) \left(|\cos(x)| - \frac{1}{2} \right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin(x) = \pm \frac{1}{2} \\ \cos(x) = \pm \frac{1}{2} \end{cases}$$



$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{6}$$

راه حل اول:

$$\begin{cases} \log_{ab}^{bc} = ۲ \Rightarrow bc = (ab)^۲ \\ \log_b^{ac} = ۵ \Rightarrow ac = b^۵ \end{cases} \xrightarrow{\text{تقسیم}} \frac{bc}{ac} = \frac{a^۲ b^۲}{b^۵} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{a^۲}{b^۳} \Rightarrow b^۴ = a^۳$$

$$\xrightarrow[\text{می گیریم}]{\log_b \text{ در مبنای}} \log_b^{b^۴} = \log_b^{a^۳} \Rightarrow ۴ \log_b^b = ۳ \log_b^a \Rightarrow \log_b^a = \frac{۴}{۳}$$

نکته: $\log_b^{a^m} = \frac{m}{n} \log_b^a$
راه حل دوم:

$$\log_{ab}^{bc} = \frac{\log_b^{bc}}{\log_b^{ab}} = \frac{\log_b^b + \log_b^c}{\log_b^a + \log_b^b} = \frac{۱ + \log_b^c}{\log_b^a + ۱} = ۲ \Rightarrow ۱ + \log_b^c = ۲ + ۲ \log_b^a$$

$$\Rightarrow ۲ \log_b^a - \log_b^c = -۱ \Rightarrow \log_b^{ac} = \log_b^a + \log_b^c = ۵ \Rightarrow \begin{cases} ۲ \log_b^a - \log_b^c = -۱ \\ \log_b^a + \log_b^c = ۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_b^a = \frac{۴}{۳} \\ \log_b^c = \frac{۱۱}{۳} \end{cases}$$

در دنباله هندسی داریم:

$$a_۳ = a_۱ q^۲, a_۶ = a_۱ q^۵, a_۹ = a_۱ q^۸$$

$$\xrightarrow{\text{واسطه حسابی}} a_۹ + a_۳ = ۲(a_۶) \Rightarrow a_۱ q^۸ + a_۱ q^۲ = ۲a_۱ q^۵$$

$$\xrightarrow{\div a_۱ q^۲} q^۶ + ۱ = ۲q^۳ \Rightarrow q^۶ - ۲q^۳ + ۱ = ۰ \xrightarrow{q^۳=t} t^۲ - ۲t + ۱ = ۰$$

$$\Rightarrow \Delta = ۴ - ۴ = ۰ \Rightarrow t = \frac{۲ \pm \sqrt{۰}}{۲} = ۱ \pm \sqrt{۰}$$

$$\xrightarrow{t=q^۳} q^۳ = ۱ \pm \sqrt{۰}$$

$$\frac{a_۹}{a_۳} = \frac{a_۱ q^۸}{a_۱ q^۲} = q^۶ = (۱ \pm \sqrt{۰})^۲ = ۱ \pm ۰ + ۰ = ۱ \pm ۰$$

اگر بخواهیم این معادله را به شیوه عادی حل کنیم و یکی از رادیکال‌ها را به طرف دیگر برده و به توان ۲ برسانیم؛ بازهم از شر رادیکال خلاص نمی‌شویم و بارها و بارها باید این عملیات را تکرار کنیم تا شاید جواب بدهد، بنابراین کافی است به عبارت زیر رادیکال کمی دقت کنیم و به‌ویژه $2\sqrt{x-1}$ که کلید معماست. عبارت $x + 2\sqrt{x-1}$ همان $(\sqrt{x-1})^2 + 1^2 + 2\sqrt{x-1}$ و عبارت $x - 2\sqrt{x-1}$ همان $(\sqrt{x-1})^2 + 1^2 - 2\sqrt{x-1}$ است، بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} &= \sqrt{(\sqrt{x-1})^2 + 1^2 + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{(\sqrt{x-1})^2 + 1^2 - 2\sqrt{x-1}} \\ &= \sqrt{(\sqrt{x-1} + 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1} - 1)^2} = |\sqrt{x-1} + 1| + |\sqrt{x-1} - 1| = 2 \end{aligned}$$

عبارت $\sqrt{x-1} + 1$ همواره مثبت است و از قدر مطلق خارج می‌کنیم. اما در مورد $\sqrt{x-1} - 1$ ؛ اگر مثبت یا صفر باشد (یعنی $(\sqrt{x-1} - 1 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x-1} \geq 1 \Rightarrow x \geq 2)$) داریم:

$$\begin{aligned} \sqrt{x-1} + 1 + \sqrt{x-1} - 1 &= 2 \Rightarrow 2\sqrt{x-1} = 2 \\ \Rightarrow \sqrt{x-1} = 1 \Rightarrow x-1 = 1 \Rightarrow x = 2 \xrightarrow{x \geq 2} x = 2 \quad \text{قق} \end{aligned}$$

و اگر $\sqrt{x-1} - 1$ منفی باشد (یعنی $(\sqrt{x-1} < 1 \Rightarrow x < 2 \xrightarrow{x \geq 1} 1 \leq x < 2)$) داریم:

$$\sqrt{x-1} + 1 + 1 - \sqrt{x-1} = 2 \Rightarrow 2 = 2 \Rightarrow x \in \mathbb{R} \xrightarrow{1 \leq x < 2} 1 \leq x < 2$$

بنابراین این معادله به ازای تمامی مقادیر $1 \leq x \leq 2$ صحیح است و بی‌شمار ریشه حقیقی دارد.

آمار و احتمال

$$\begin{aligned} p \vee q \Rightarrow (p \Rightarrow q) &\equiv \sim (p \vee q) \vee (p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim p \vee q) \\ &\equiv ((\sim p \wedge \sim q) \vee \sim p) \vee q = \sim p \vee q \equiv p \Rightarrow q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [p \vee (\sim q \wedge \sim p)] \wedge q &\equiv \left[(p \vee \sim q) \wedge \underbrace{(p \vee \sim p)}_T \right] \wedge q \\ &\equiv (p \vee \sim q) \wedge q \equiv (p \wedge q) \vee \underbrace{(\sim q \wedge q)}_F \equiv p \wedge q \end{aligned}$$

ابتدا مجموعه‌های A_3 و A_4 را با اعضای تشکیل دهنده آن تعیین می‌کنیم.

$$A_n = \{m \in \mathbb{Z} | m \geq -n, 2^m \leq n\}$$

$$A_3 = \{m \in \mathbb{Z} | m \geq -3, 2^m \leq 3\} = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$$

$$A_4 = \{m \in \mathbb{Z} | m \geq -4, 2^m \leq 4\} = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$$

بنابراین $A_3 \cap A_4$ به صورت زیر می‌شود:

$$A_3 \cap A_4 = \{-3, -2, -1, 0, 1\} \Rightarrow |A_3 \cap A_4| = 5$$

پس تعداد زیرمجموعه‌های $A_3 \cap A_4$ برابر است با:

$$2^{|A_3 \cap A_4|} = 2^5 = 32$$

نمونه‌گیری سیستماتیک نوعی نمونه‌گیری است که در آن اندازه طبقات باهم برابرند. برای این کار از طبقه اول یک واحد آماری را انتخاب کرده و سپس با همان رویه از طبقات دیگر نیز نمونه‌گیری انجام می‌دهیم. چون نمونه قرار است ۵۰تایی باشد، پس ۵۰ طبقه داریم (از هر طبقه یک نمونه انتخاب می‌شود) که تعداد اعضای هر طبقه برابر است با:

$$\frac{1000}{50} = 20$$

در یک دنباله حسابی با قدر نسبت ۲۰ و جمله اول ۵، جمله بیست و پنجم برابر است با:

$$(25 - 1) \times 20 + 5 = 485$$

$$A - B = \{5, 6, 8\} \Rightarrow (A - B)' = \{1, 2, 3, 4, 7, 9\}$$

$$A \cap (A - B)' = \{1, 3\}$$

$$B - A = \{2, 4, 7, 9\} \Rightarrow (B - A)' = \{1, 3, 5, 6, 8\}$$

$$B \cap (B - A)' = \{1, 3\}$$

$$\Rightarrow [A \cap (A - B)'] \cup [B \cap (B - A)'] = \{1, 3\}$$

بنابراین تعداد زیرمجموعه‌هایش برابر با $2^2 = 4$ خواهد بود.

گزینه ۲

۲۵

می‌نویسیم:

$$\begin{vmatrix} -۳ & ۱ & ۴ \\ a & -۱ & ۰ \\ -۱ & ۳ & ۱ \end{vmatrix} = m$$

بسط برحسب ستون سوم:

$$۴(۳a - ۱) + ۱(۳ - a) = ۱۲a - ۴ + ۳ - a = ۱۱a - ۱$$

یعنی: $۱۱a - ۱ = m$

از طرف دیگر بسط برحسب ستون دوم به دست می‌آید:

$$\begin{vmatrix} ۳ & ۱ & -۱ \\ ۱ & ۴ & -۳ \\ -۱ & ۰ & a-۱ \end{vmatrix} = -۱(a - ۱ - ۳) + ۴(۳a - ۳ - ۱) = -a + ۴ + ۱۲a - ۱۶ = ۱۱a - ۱۲$$

درنتیجه:

$$\begin{vmatrix} ۳ & ۱ & -۱ \\ ۱ & ۴ & -۳ \\ -۱ & ۰ & a-۱ \end{vmatrix} = ۱۱a - ۱۲ = m - ۱۱$$

گزینه ۴

۲۶

چون $|V_1| = |V_2|$ ، پس:

$$\sqrt{۴ + (a+۱)^2 + ۱۶} = \sqrt{a^2 + ۱۶ + ۹} \Rightarrow ۲۰ + a^2 + ۲a + ۱ = a^2 + ۲۵ \Rightarrow a = ۲$$

یعنی:

$$V_1 = (۲, ۳, ۴), V_2 = (۲, ۴, ۳)$$

اکنون اگر θ زاویه بین V_1 و V_2 باشد، می‌توان نوشت:

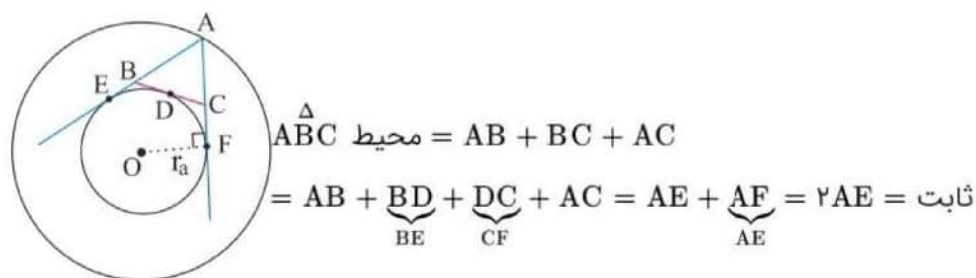
$$\cos \theta = \frac{V_1 \cdot V_2}{|V_1||V_2|} = \frac{۴ + ۱۲ + ۱۲}{\sqrt{۴ + ۹ + ۱۶}\sqrt{۴ + ۱۶ + ۹}} = \frac{۲۸}{۲۹}$$

گزینه ۱

۲۷

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-۱)^2 + (y-۲)^2} &= ۲\sqrt{(x-۲)^2 + (y-۱)^2} \\ \Rightarrow (x-۱)^2 + (y-۲)^2 &= ۴(x-۲)^2 + ۴(y-۱)^2 \\ \Rightarrow -۲x + ۱ - ۴y + ۴ &= ۳x^2 - ۱۶x + ۱۶ + ۳y^2 - ۸y + ۴ \\ \Rightarrow ۳x^2 - ۱۴x + ۱۵ + ۳y^2 - ۴y &= ۰ \xrightarrow{\div ۳} x^2 - \frac{۱۴}{۳}x + \frac{۵}{۳} + y^2 - \frac{۴}{۳}y = ۰ \\ \Rightarrow \left(x - \frac{۷}{۳}\right)^2 + \left(y - \frac{۲}{۳}\right)^2 &= \dots \Rightarrow (a, b) = \left(\frac{۷}{۳}, \frac{۲}{۳}\right) \Rightarrow ab = \frac{۱۴}{۹} \end{aligned}$$

باتوجه به اینکه فاصله نقطه A از مرکز دایره کوچک ثابت است، پس با حرکت نقطه A روی دایره بزرگ، طول مماس‌های AE و AF تغییری نمی‌کند و ثابت می‌ماند. از نقاط B و C مماس‌هایی بر دایره کوچک رسم شده‌اند؛ پس $BD = BE$ و $CD = CF$ و داریم:



پس محیط مثلث ABC ثابت می‌ماند.

دایره کوچک، دایره محاطی خارجی نظیر ضلع BC از مثلث ABC است و طول ضلع BC را a و محیط مثلث ABC را P و مساحت آن را S در نظر می‌گیریم، پس داریم:

$$r_a = \frac{S}{P - a} \Rightarrow S = \underbrace{r_a}_{\text{ثابت}} (\underbrace{P}_{\text{ثابت}} - \underbrace{a}_{\text{متغیر}})$$

باتوجه به اینکه در عبارت فوق، مقدار a متغیر و بقیه ثابت‌اند، مقدار S هم متغیر است.

با عددگذاری دترمینان ماتریس داده‌شده را محاسبه می‌کنیم:

$$a = 0, b = 90, c = 90 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1+1) = 0$$

در گزینه ۳ داریم:

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} + 3(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} \\ = 2(0 - (-3)) + 3(-2 - 0) = 6 - 6 = 0$$

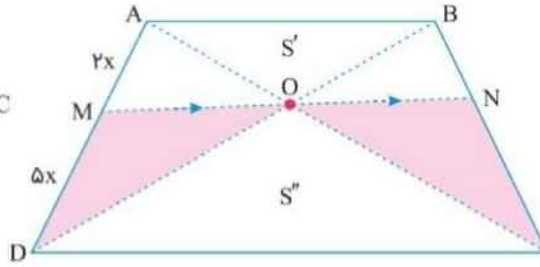
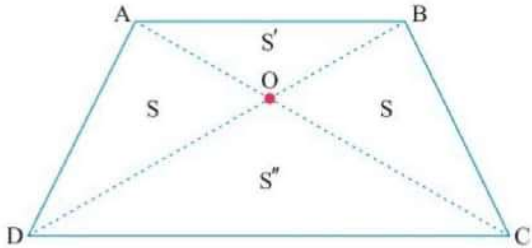
در بقیه گزینه‌ها دترمینان برابر با صفر نمی‌شود.

جعبه ابزار: در هر ذوزنقه، پس از رسم دو قطر، چهار مثلث پدید می‌آید که داریم:

الف) $S_{\triangle OAD} = S_{\triangle OBC} = S$ (مثلث‌های پروانه‌ای هم‌مساحت)

ب) $S' \times S'' = S^2$

پ) $\triangle OAB \sim \triangle OCD \Rightarrow \frac{S'}{S''} = \left(\frac{AB}{DC}\right)^2 = \left(\frac{AO}{CO}\right)^2 = \left(\frac{BO}{DO}\right)^2$



$$S_{\triangle OMD} = S_{\triangle ONC} = \frac{1}{2} \times \frac{100}{V} = \frac{50}{V}$$

از طرفی دو مثلث OMD و OAD، از رأس O، هم‌ارتفاع هستند، پس نسبت مساحت‌های آنها با نسبت قاعده‌هایشان برابر است. یعنی:

$$\frac{S_{\triangle OAD}}{S_{\triangle OMD}} = \frac{AD}{MD} \Rightarrow \frac{S_{\triangle OAD}}{\frac{50}{V}} = \frac{V}{5} \Rightarrow S_{\triangle OAD} = \frac{V}{5} \times \frac{50}{V} = 10$$

اکنون توجه کنید طبق قضیهٔ تالس در مثلث ADC، داریم:

$$\triangle ADC : MO \parallel DC \Rightarrow \frac{AO}{OC} = \frac{AM}{MD} = \frac{2}{5}$$

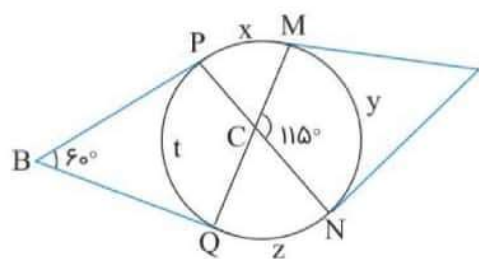
از نکتهٔ جعبه ابزار داریم:

$$\begin{cases} S' \times S'' = S^2 \xrightarrow{S=S_{\triangle OAD}=10} S' \times S'' = 100 & (1) \\ \frac{S'}{S''} = \left(\frac{AO}{OC}\right)^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25} \Rightarrow S' = \frac{4}{25} S'' & (2) \end{cases}$$

از (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{aligned} S' \times S'' = 100 &\Rightarrow \frac{4}{25} S'' \times S'' = 100 \Rightarrow \left(\frac{4}{25} S''\right)^2 = 100 \\ \xrightarrow{\text{جذر}} \frac{4}{25} S'' &= 10 \Rightarrow S'' = 25 \Rightarrow S' = \frac{4}{25} \times 25 = 4 \\ \Rightarrow S'' - S' &= 25 - 4 = 21 \end{aligned}$$

با نام‌گذاری کمان‌ها مطابق شکل، داریم:



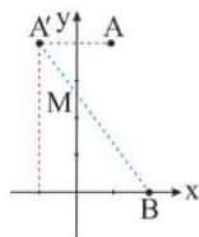
$$\begin{aligned}\hat{B} &= \frac{x+y+z-t}{2} = 60^\circ \Rightarrow x+y+z-t = 120^\circ \quad (*) \\ \hat{C} &= \frac{y+t}{2} = 115^\circ \Rightarrow y+t = 230^\circ \xrightarrow{x+y+z+t=360^\circ} x+z = 130^\circ \\ \xrightarrow{(*)} y-t &= -10^\circ \Rightarrow \hat{MAN} = \frac{(x+z) + (t-y)}{2} = \frac{130^\circ + 10^\circ}{2} = 70^\circ\end{aligned}$$

قرینه A نسبت به محور y را نقطه A' می‌نامیم:

$$A(1, 4) \rightarrow A'(-1, 4)$$

از A' به B وصل می‌کنیم طبق قضیه هرون طول کوتاه‌ترین مسیر مذکور برابر است با طول مسیر MA + MB که طبق ویژگی‌های بازتاب داریم:

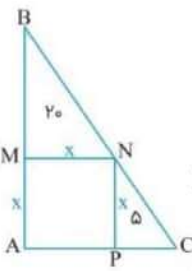
$$MA = MA'$$



پس:

$$\begin{aligned}MA + MB &= MA' + MB = A'B = \sqrt{(2+1)^2 + (0-4)^2} \\ &= \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5\end{aligned}$$

دو مثلث قائم الزاویه BMN و CNP متشابه‌اند و نسبت مساحت‌های آن‌ها مجذور نسبت اضلاع است. اگر ضلع مربع را x فرض کنیم، داریم:



$$\triangle BMN \sim \triangle NPC \Rightarrow \frac{BM}{NP} = \frac{MN}{PC} = \frac{BN}{NC} = \sqrt{\frac{S_{BMN}}{S_{CNP}}}$$

$$\Rightarrow \frac{BM}{x} = \frac{x}{PC} = \sqrt{\frac{\gamma_0}{\delta}} = \gamma \Rightarrow BM = \gamma x$$

$$S_{BMN} = \gamma_0 \Rightarrow \frac{BM \cdot MN}{\gamma} = \gamma_0 \Rightarrow \frac{\gamma x \cdot x}{\gamma} = \gamma_0$$

$$\Rightarrow x^2 = \gamma_0 \Rightarrow S_{AMNP} = \gamma_0$$

حجم متوازی‌السطوحی که روی سه بردار $\vec{a}$, $\vec{b}$ و $\vec{c}$ ساخته می‌شود برابر است با: $|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$
بنابراین برای به دست آوردن حجم متوازی‌السطوح پدید آمده توسط سه بردار $\vec{a}$, $\vec{b}$ و $\vec{a} - \vec{b}$ داریم:

$$\vec{a} - \vec{b} = -\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (2 - 3)\vec{i} - (-1 - 6)\vec{j} + (1 + 4)\vec{k} = -\vec{i} + 7\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$(\vec{a} - \vec{b}) \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (3 - 4)\vec{i} - (1 - 8)\vec{j} + (-1 + 6)\vec{k} = -\vec{i} + 7\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$\Rightarrow V = |((\vec{a} - \vec{b}) \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b})| = |(-1, 7, 5) \cdot (-1, 7, 5)| = 1 + 49 + 25 = 75$$

ریاضیات گسسته

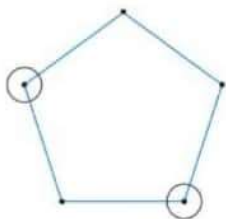
$$a = bq + 13 \Rightarrow a - 13 = bq \xrightarrow[a > 2]{a \text{ عددی اول}} a - 13 = \text{عددی زوج}$$

$$bq = \text{عددی زوج} \xrightarrow{b > 13} q = \text{عددی زوج} \Rightarrow q = 2$$

می‌دانیم $b > 13$ و عددی اول است، بنابراین کوچک‌ترین مقدار b برابر $b = 17$ است، پس داریم:

$$a_{\min} = 17 \times 2 + 13 \Rightarrow a_{\min} = 47 \xrightarrow{\text{مجموع ارقام}} 4 + 7 = 11$$

چون G غیرتهی (یال دارد) است پس $k > 0$. از طرفی گراف ساده فرد-منتظم مرتبه فرد وجود ندارد، پس $k > 1$ بوده و کمترین مقدار k برابر ۲ است. یعنی G ، ۲-منتظم است که در آن $\gamma = 2$ است.



$k = 3$ نیز نمی‌تواند باشد و بیشترین مقدار k نیز برابر $k = 4$ است (گراف کامل) که در آن $\gamma = 1$ خواهد بود؛ پس $\gamma(G)$ برابر ۱ یا ۲ است.

به بررسی تک‌تک گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینه ۱: اگر $a^3 | b^2$ آنگاه $a | b$

$$a^3 | b^2 \Rightarrow a \times a^2 | b^2 \Rightarrow a^2 | b^2 \Rightarrow a | b (*)$$

گزینه ۲: اگر $a^3 | b^2$ آنگاه $a^4 | b^3$

با استفاده از گزینه ۱ (*) داریم:

$$\begin{cases} a^3 | b^2 \\ a | b (*) \end{cases} \Rightarrow a^4 | b^3$$

گزینه ۳: اگر $a^3 | b^2$ آنگاه $a^2 | b$

$$\text{اگر } a = 4, b = 8 \Rightarrow a^3 | b^2 \quad (64 | 64)$$

ولی $a^2 \nmid b$ (۱۶/۸)، بنابراین این گزینه نادرست است.

گزینه ۴: اگر $a^3 | b^2$ آنگاه $a^6 | b^4$

$$a^3 | b^2 \xrightarrow{\text{به توان دو}} a^6 | b^4$$

اگر n مقسوم‌علیه‌ای از $2^{n-1} | n$ باشد، پس n فقط می‌تواند اعداد باشد که به صورت 2^k هستند.

درست است $n = 1 \Rightarrow 1 | 2^0$

درست است $n = 2 \Rightarrow 2 | 2^1$

درست است $n = 4 \Rightarrow 4 | 2^3$

درست است $n = 8 \Rightarrow 8 | 2^7$

درست است $n = 16 \Rightarrow 16 | 2^{15}$

درست است $n = 32 \Rightarrow 32 | 2^{31}$

درست است $n = 64 \Rightarrow 64 | 2^{63}$

پس برای n می‌توان ۷ جواب در نظر گرفت.

$$x = 2^m \times 3^m \times 5^n \Rightarrow 2^{m+n} \times 3^m \times 5^n$$

$$\xrightarrow{\text{تعداد مقسوم علیه های صحیح}} (m+n+1)(m+1)(n+1)$$

$$15x = 2^{m+n} \times 3^m \times 5^n \times 5 \times 3 = 2^{m+n} \times 3^{m+1} \times 5^{n+1}$$

$$\xrightarrow{\text{تعداد مقسوم علیه های صحیح}} (m+n+1)(m+2)(n+2)$$

$$\Rightarrow (m+n+1)(m+2)(n+2) - (m+n+1)(m+1)(n+1) = 35$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتور از } (m+n+1)} (m+n+1)[(m+2)(n+2) - (m+1)(n+1)] = 35$$

$$\Rightarrow (m+n+1)[m+n+3] = 35$$

$$\Rightarrow m+n=4 \Rightarrow \begin{cases} m=4, n=0 \\ m=3, n=1 \\ m=2, n=2 \\ m=1, n=3 \\ m=0, n=4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{کمترین: } 1296, \text{ بیشترین: } 10000 \xrightarrow{\text{اختلاف}} 8704$$

$$\Delta(\overline{G}) = 13, \delta(G) = 2 \text{ چون}$$

رأس درجه $\Delta = 13$ در گراف $\overline{G}$ ، چهارده رأس را احاطه می‌کند. می‌ماند $2 = 14 - 16$ رأس که هنوز احاطه نشده‌اند.

اگر این دو رأس مجاور باشند یا رأسی موجود باشد که با هر دوی این رأس‌ها مجاور باشد، آنگاه $2 = \gamma$ و اگر این دو رأس مجاور نباشند و رأسی هم موجود نباشد که با هر دوی این رأس‌ها مجاور باشد، آنگاه $3 = \gamma$.

بنابراین گزینهٔ ۳ صحیح است.

فیزیک

مقدار متوسط آهنگ انتقال انرژی یا همان توان متوسط در یک موج مکانیکی با مربع دامنه (A^2) و مربع بسامد (f^2) متناسب است.

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 \times \left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2 = \left(\frac{2A_1}{A_1}\right)^2 \times \left(\frac{2f_1}{f_1}\right)^2 = 4 \times 4 = 16 \Rightarrow P_2 = 16P_1$$

برای تغییر تراز شدت صوت از این رابطه باید استفاده شود:

$$\Delta\beta = \beta_2 - \beta_1 = 10 \log \frac{I_2}{I_1} = 10 \log \left(\frac{A_2}{A_1} \times \frac{f_2}{f_1} \times \frac{r_1}{r_2} \right)^2$$

نکته: $\frac{f_2}{f_1} = \frac{T_1}{T_2}$

بررسی تک تک گزینه‌ها:

$$1) \frac{A_2}{A_1} = 4, \quad \frac{f_2}{f_1} = 2 \Rightarrow \Delta\beta = 10 \log \left(\frac{A_2}{A_1} \times \frac{f_2}{f_1} \right)^2 = 10 \log (4 \times 2)^2 \\ = 10 \log (2^3)^2 = 60 \log 2 = 6/3 \times 60 = 12 \text{ dB}$$

$$2) \Delta\beta = 10 \log \left(\frac{A_2}{A_1} \times \frac{f_2}{f_1} \right)^2 = 10 \log (3 \times 2)^2 = 20 \left[\log 3 + \log 2 \right] = 16 \text{ dB}$$

$$3) \Delta\beta = 10 \log \left(\frac{A_2}{A_1} \times \frac{T_1}{T_2} \times \frac{r_1}{r_2} \right)^2 = 10 \log (5 \times 2 \times 2)^2 = 20 \log (20) \\ = 20 [\log 10 + \log 2] = 20 [1 + 0/3] = 26 \text{ dB}$$

$$4) \Delta\beta = 10 \log \left(\frac{A_2}{A_1} \times \frac{T_1}{T_2} \right)^2 = 10 \log \left(6 \times \frac{1}{6} \right)^2 = 0$$

کافی است زاویه شکست هریک از پرتوها را به دست آورده و از هم کم کنیم. می‌دانیم که ضریب شکست بیشتر معادل انحراف بیشتر پرتو نور است.
 $n_2 > n_1$

$$(1) \text{ برای پرتو } : \frac{\sin i}{\sin r_1} = n_1 \Rightarrow \frac{\sin 60^\circ}{\sin r_1} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{3}{r_1}} \Rightarrow \sin r_1 = \frac{\sqrt{r_1}}{2} \Rightarrow r_1 = 45^\circ$$

$$(2) \text{ برای پرتو } : \frac{\sin i}{\sin r_2} = n_2 \Rightarrow \frac{\sin 60^\circ}{\sin r_2} = \sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{r_2} \Rightarrow \sin r_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow r_2 = 30^\circ$$

$$\theta = r_1 - r_2 = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$$

نوع بار گوی A منفی و نوع بار گوی B مثبت است بنابراین تعداد الکترون‌های گوی B کمتر از تعداد الکترون‌های گوی A است. بنابراین گزینه‌های ۱ و ۳ نمی‌توانند درست باشند.

ابتدا تعداد الکترون‌هایی که گوی A بیشتر از حالت خنثی دارد را به دست می‌آوریم:

$$n_A = \frac{q_A}{e} = \frac{4 \times 10^{-9}}{1/6 \times 10^{-19}} = 2/5 \times 10^{10}$$

سپس تعداد الکترون‌هایی که گوی B کمتر از حالت خنثی دارد را محاسبه می‌کنیم:

$$n_B = \frac{q_B}{e} = \frac{12 \times 10^{-9}}{1/6 \times 10^{-19}} = 7/5 \times 10^{10}$$

گوی A، $2/5 \times 10^{10}$ الکترون نسبت به حالت خنثی بیشتر دارد و گوی B، $7/5 \times 10^{10}$ الکترون کمتر از حالت خنثی دارد پس گوی B نسبت به A $10^{11} = 10 \times 10^{10}$ الکترون کمتر دارد.

گام اول: ابتدا جرم ورقه دایره‌ای و جرم فلز به‌کاررفته درون کره را به دست می‌آوریم.

$$m_{\text{ورقه دایره‌ای}} = \rho V = \rho Ah = \rho(20 \times 1) = 20\rho$$

$$m_{\text{کره}} = \rho V = \rho\left(\frac{4}{3}\pi(3^3 - 2^3)\right) = 76\rho$$

گام دوم: با استفاده از رابطه نسبیتی بین ورقه فلزی و فلز کره، نسبت تغییرات دمای ورقه فلزی و فلز کره را به دست می‌آوریم:

$$Q = mc\Delta\theta \Rightarrow \frac{2Q}{Q} = \frac{m_{\text{فلز کره}}}{m_{\text{ورقه}}}\times \frac{c}{c}\times \frac{\Delta\theta_{\text{فلز کره}}}{\Delta\theta_{\text{ورقه}}} \\ \Rightarrow 2 = \frac{76\rho}{20\rho} \times 1 \times \frac{\Delta\theta_{\text{فلز کره}}}{\Delta\theta_{\text{ورقه}}} \Rightarrow \frac{\Delta\theta_{\text{فلز کره}}}{\Delta\theta_{\text{ورقه}}} = \frac{40}{76}$$

گام سوم: با استفاده از رابطه $\Delta S = S_1(2\alpha)\Delta\theta$ برای ورقه فلزی، ضریب انبساط خطی فلز را به دست می‌آوریم:

$$0/2 = 20 \times 2\alpha \times \Delta\theta_{\text{ورقه}} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{200\Delta\theta_{\text{ورقه}}}$$

گام چهارم: تغییر حجم فلز کره را به دست می‌آوریم.

$$\Delta V = V_1(3\alpha)\Delta\theta_{\text{فلز کره}} = \left(\frac{4}{3}\pi(3^3 - 2^3)\right) \times \left(3 \times \frac{1}{200\Delta\theta_{\text{ورقه}}}\right) \times \Delta\theta_{\text{فلز کره}} \\ \Rightarrow \Delta V = 76 \times 3 \times \frac{\Delta\theta_{\text{فلز کره}}}{200\Delta\theta_{\text{ورقه}}} = 76 \times 3 \times \frac{40}{200 \times 76} = 0/6 \text{ cm}^3$$

گام اول: ابتدا شکلی از مسئله رسم می‌کنیم:



مسافتی که هریک از دو اتومبیل طی می‌کنند تا متوقف شوند را به دست می‌آوریم. با استفاده از معادله مستقل از زمان، داریم:

$$\begin{aligned} A : v^2 - v_0^2 &= 2a\Delta x \Rightarrow 0 - (20)^2 = 2(-2)\Delta x_A \Rightarrow \Delta x_A = 100 \text{ m} \\ B : v^2 - v_0^2 &= 2a\Delta x \Rightarrow 0 - (10)^2 = 2(+2)\Delta x_B \Rightarrow |\Delta x_B| = 25 \text{ m} \end{aligned}$$

بنابراین مجموع مسافت‌هایی که دو اتومبیل طی می‌کنند تا متوقف شوند بیشتر از ۱۱۶ متر است و دو اتومبیل به یکدیگر برخورد می‌کنند.

اتومبیل B در مدت $t = \frac{|v_0|}{|a|} = \frac{10}{2} = 5 \text{ s}$ متوقف می‌شود. در این مدت مجموع جابجایی دو اتومبیل برابر است با:

$$\begin{cases} \Delta x_A = -t^2 + 20t \xrightarrow{t=5\text{s}} \Delta x_A = -5^2 + 20(5) = 75 \text{ m} \\ \Delta x_B = +t^2 - 10t \xrightarrow{t=5\text{s}} |\Delta x_B| = |+(5)^2 - 10(5)| = 25 \text{ m} \end{cases}$$

پس از توقف اتومبیل B فاصله بین دو اتومبیل به $16 \text{ m} - (75 + 25) = 16 \text{ m}$ می‌رسد و اتومبیل A این فاصله ۱۶ متری را به‌تنهایی طی می‌کند تا به اتومبیل B برخورد کند. بنابراین کل مسافتی که اتومبیل A طی می‌کند برابر $75 + 16 = 91 \text{ m}$ است و سرعت متحرک A پس از طی این مسافت یعنی در لحظه برخورد به اتومبیل B برابر است با:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x_A \Rightarrow v^2 - 20^2 = 2(-2)(91) \Rightarrow v^2 = 36 \text{ m/s} \Rightarrow v = 6 \text{ m/s}$$

با استفاده از رابطه‌های فشار ($P = \rho gh$ و $P = \frac{F}{A}$) داریم:

$$\frac{P_A}{P_B} = \frac{\rho gh_A}{\rho gh_B} = \frac{h_A}{\frac{1}{\gamma} h_A} = \gamma$$

$$\frac{F_A}{F_B} = \frac{P_A A_A}{P_B A_B} = \gamma \times \frac{\pi r_A^2}{\pi r_B^2} = \gamma \times \frac{r_A^2}{\frac{1}{\gamma} r_A^2} = \gamma$$

$$\rho_{\text{آلیاژ}} = \frac{m_{\text{قلع}} + m_{\text{روی}}}{V_{\text{قلع}} + V_{\text{روی}}} = \frac{\rho_{\text{قلع}} V_{\text{قلع}} + \rho_{\text{روی}} V_{\text{روی}}}{V_{\text{قلع}} + V_{\text{روی}}}$$

$$\Rightarrow ۰/۶ V_{\text{قلع}} = ۲/۴ V_{\text{روی}} \Rightarrow V_{\text{روی}} = \frac{۱}{۴} V_{\text{قلع}}$$

$$۹/۶ = \frac{۹ V_{\text{قلع}} + ۱۲ V_{\text{روی}}}{V_{\text{قلع}} + V_{\text{روی}}} \Rightarrow ۹/۶ V_{\text{قلع}} + ۹/۶ V_{\text{روی}} = ۹ V_{\text{قلع}} + ۱۲ V_{\text{روی}}$$

$$\frac{V_{\text{قلع}}}{V_{\text{کل}}} = \frac{V_{\text{قلع}}}{V_{\text{قلع}} + \frac{۱}{۴} V_{\text{قلع}}} = \frac{V_{\text{قلع}}}{\frac{۵}{۴} V_{\text{قلع}}} = \frac{۴}{۵} \times ۱۰۰ = ۸۰\%$$

نسبت سرعت نور در محیط‌های (۱) و (۲) را به دست می‌آوریم:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = \frac{۰/۸}{۰/۵} = ۱/۶ \Rightarrow v_2 = ۱/۶ v_1$$

از رابطه $\frac{\text{مسافت طی شده}}{\text{زمان حرکت}} = \text{تندی}$ ، مدت زمان رسیدن پرتو از نقطه A به A' را به دست می‌آوریم:

$$t = \frac{AO + OA'}{v_1} = \frac{۲AO}{v_1}$$

مدت زمان رسیدن پرتو از نقطه A به O و O به B را به دست می‌آوریم:

$$t' = \frac{OA}{v_1} + \frac{OB}{v_2} = \frac{OA}{v_1} + \frac{OB}{۱/۶ v_1} = \frac{۱/۶ OA + OB}{۱/۶ v_1} = \frac{۲/۶ OA}{۱/۶ v_1}$$

حال نسبت $\frac{t'}{t}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{t'}{t} = \frac{\frac{۲/۶ OA}{۱/۶ v_1}}{\frac{۲OA}{v_1}} = \frac{۲/۶}{۳/۲} = \frac{۱۳}{۱۶}$$

گام اول

الف) قطار A به طول ۲۰۰ متر با سرعت ثابت $۴۰\text{ m/s} \leftarrow ۴۰\text{ m/s}$ ، $v_A = ۴۰\text{ m/s}$ ، $a_A = ۰$

ب) قطار B به طول ۲۲۵ متر هنگامی که قطار A از آن عبور می‌کند با شتاب ثابت ۲ m/s^2 در همان جهت به راه می‌افتد

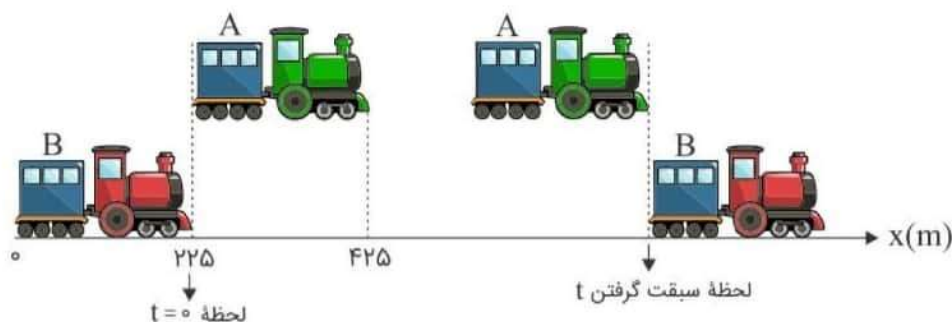
$\leftarrow x_{0A} = ۲۲۵\text{ m}$ ، $a_B = +۲\text{ m/s}^2$ ، $v_{0B} = ۰$

ج) قطار B سرعت خود را به ۵۰ m/s می‌رساند $\leftarrow v_{1B} = ۵۰\text{ m/s}$

د) قطار B چند ثانیه پس از شروع حرکت، از قطار A سبقت گرفته و کاملاً از آن عبور می‌کند $\leftarrow t_{\text{سبقت}} = ?$

گام دوم

باتوجه به شکل، برای ابتدای هر قطار معادله‌ها را نوشته و سبقت t را به دست می‌آوریم. با استفاده از معادله سرعت-زمان، زمانی که سرعت قطار B، ۵۰ m/s می‌شود (t_1) را محاسبه می‌کنیم:



$$v_B = a_B t_1 + v_{0B} \Rightarrow 50 = 2t_1 \Rightarrow t_1 = 25\text{ s}$$

از لحظه $t_1 = 25\text{ s}$ به بعد، قطار B با سرعت ثابت ۵۰ m/s به حرکت خود ادامه می‌دهد. در این لحظه مکان قطار A و B را به کمک معادله مکان آن‌ها می‌یابیم:

$$\begin{cases} x_A = v_A t_1 + x_{0A} \Rightarrow x_A = 1225\text{ m} \\ x_B = \frac{1}{2} a_B t_1^2 + v_{0B} t_1 + x_{0B} \Rightarrow x_B = 625\text{ m} \end{cases}$$

از این پس دو قطار با سرعت ثابت ۴۰ m/s ، ۵۰ m/s حرکت می‌کنند و با توجه به رابطه $x_B - x_A = 200\text{ m}$ (لحظه‌ای که قطار B از A کاملاً عبور کرده) زمان سبقت را به دست می‌آوریم:

$$x_A = v_A t_r + x_{0A} \Rightarrow x_A = 40t_r + 1225$$

$$x_B = v_B t_r + x_{0B} \Rightarrow x_B = 50t_r + 625$$

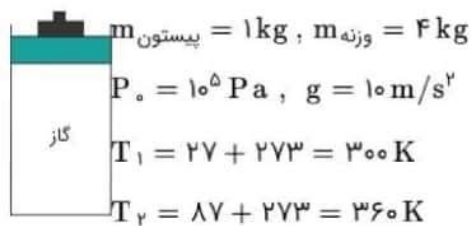
$$(50t_r + 625) - (40t_r + 1225) = 200 \Rightarrow t_r = 80\text{ s}$$

درنهایت زمان سبقت از لحظه شروع حرکت برابر است با:

$$t_{\text{سبقت}} = t + t_r = 25 + 80 = 105\text{ s}$$

باتوجه به اینکه پیستون جابه‌جا نمی‌شود، پس حجم گاز درون محفظه ثابت است.

در حجم ثابت، فشار مقدار معینی گاز با دمای مطلق گاز نسبت مستقیم دارد: $\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$



$$A = 5 \text{ cm}^2 = 5 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

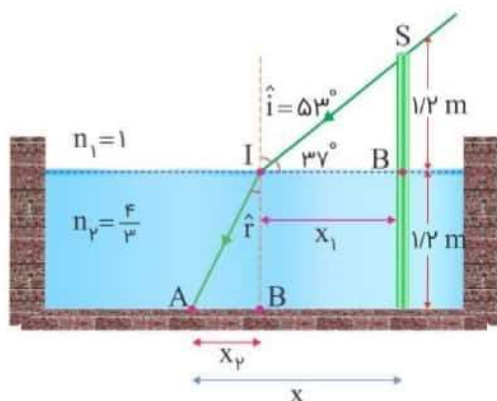
$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2} \Rightarrow \frac{P_0 + \frac{(m_{\text{پیستون}} + m_{\text{وزنه}})g}{A}}{T_1} = \frac{P_0 + \frac{(m_{\text{پیستون}} + m_{\text{وزنه}} + m)g}{A}}{T_2}$$

$$\Rightarrow \frac{10^5 + \frac{(1+4) \times 10}{5 \times 10^{-4}}}{300} = \frac{10^5 + \frac{(1+4+m) \times 10}{5 \times 10^{-4}}}{360}$$

$$\Rightarrow \frac{2 \times 10^5}{5} = \frac{10^5 + 2 \times 10^4 \times (5 + m)}{6}$$

$$\Rightarrow 24 = 10 + 10 + 2m \Rightarrow 2m = 4 \Rightarrow m = 2 \text{ kg}$$

مطابق شکل پرتوهای نور خورشید در ضمن ورود به آب شکسته می‌شوند. برای ورود نور به آب داریم:



$$n_1 \sin \hat{i} = n_2 \sin \hat{r}$$

$$\Rightarrow 1 \times \sin 53^\circ = \frac{4}{3} \times \sin \hat{r}$$

$$\Rightarrow \sin \hat{r} = 0.6 \Rightarrow \hat{r} = 37^\circ$$

در مثلث ISB داریم:

$$\tan 37^\circ = \frac{1/2}{x_1} \Rightarrow x_1 = 1/6 \text{ m}$$

همچنین در مثلث IAB داریم:

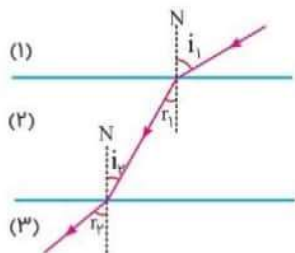
$$\tan \hat{r} = \tan 37^\circ \Rightarrow \frac{x_2}{1/2} = \frac{3}{4} \Rightarrow x_2 = 0.9 \text{ m}$$

طول سایه‌ای از تیر که بر کف استخر می‌افتد، مجموع x_1 و x_2 است، بنابراین:

$$x = 1/6 + 0.9 = 2/5 \text{ m}$$

ضریب شکست محیط (۲) بزرگ‌تر از ضریب شکست محیط‌های (۱) و (۳) است، بنابراین پرتو موج در عبور از این محیط‌ها به صورت زیر شکسته می‌شود.

زاویه انحراف پرتو در ورود از محیط (۱) به محیط (۲) نصف زاویه تابش است، بنابراین:



$$\hat{D}_1 = \hat{i}_1 - \hat{r}_1 = \frac{\hat{i}_1}{2} \Rightarrow \hat{r}_1 = \frac{\hat{i}_1}{2} \Rightarrow \hat{i}_1 = 2\hat{r}_1$$

$$\frac{\sin \hat{i}_1}{\sin \hat{r}_1} = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow \frac{\sin 2\hat{r}_1}{\sin \hat{r}_1} = \frac{1/6}{1} \Rightarrow \frac{2 \sin \hat{r}_1 \cos \hat{r}_1}{\sin \hat{r}_1} = 1/6$$

$$\Rightarrow 2 \cos \hat{r}_1 = 1/6 \Rightarrow \cos \hat{r}_1 = 1/12 \Rightarrow \hat{r}_1 = 87.7^\circ$$

$$\hat{i}_1 = 2\hat{r}_1 \Rightarrow \hat{i}_1 = 2 \times 87.7^\circ = 175.4^\circ$$

مرزها با یکدیگر موازی‌اند بنابراین خطوط عمود N و N' نیز با یکدیگر موازی‌اند و پرتو عبوری از محیط (۲) مورب است در نتیجه:

$$\hat{i}_2 = \hat{r}_1 = 87.7^\circ$$

حال قانون اسنل را برای پرتوهای تابش و شکست در محیط‌های (۲) و (۳) داریم:

$$\frac{\sin \hat{i}_2}{\sin \hat{r}_2} = \frac{n_3}{n_2} \Rightarrow \frac{\sin 87.7^\circ}{\sin \hat{r}_2} = \frac{1/2}{1/6} \Rightarrow \sin \hat{r}_2 = \frac{1/6 \times 1/6}{1/2} = 1/12 \Rightarrow \hat{r}_2 = 5.2^\circ$$

بنابراین زاویه انحراف کلی پرتو در عبور از سه محیط برابر است با:

$$\hat{D} = \hat{i}_1 - \hat{r}_2 = 175.4^\circ - 5.2^\circ = 170.2^\circ$$

بار الکتریکی قطره بزرگ‌تر، ۶۴ برابر بار هر قطره است و حجم قطره بزرگ‌تر نیز ۶۴ برابر حجم هریک از قطره‌ها است. اگر شعاع هر قطره را r و شعاع قطره بزرگ‌تر را R فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{\text{حجم قطره بزرگ}}{\text{حجم قطره کوچک}} = \left(\frac{R}{r}\right)^3 \Rightarrow 64 = \left(\frac{R}{r}\right)^3 \Rightarrow \frac{R}{r} = 4 \Rightarrow R = 4r$$

اگر مساحت قطره‌های بزرگ و کوچک را به ترتیب A و a بنامیم و بار الکتریکی آن‌ها را هم به ترتیب Q و q فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{\text{چگالی سطحی قطره بزرگ}}{\text{چگالی سطحی قطره کوچک}} = \frac{\frac{Q}{A}}{\frac{q}{a}} = \frac{Q=64q}{A=16a} \times \frac{\frac{4\pi a}{16a}}{\frac{4\pi a}{4a}} = \frac{64}{16} = 4$$

$$k\Delta\ell = mg \Rightarrow \frac{k}{m} = \frac{g}{\ell} = \frac{10}{0.4} = 25$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{25} = 5 \text{ rad/s}$$

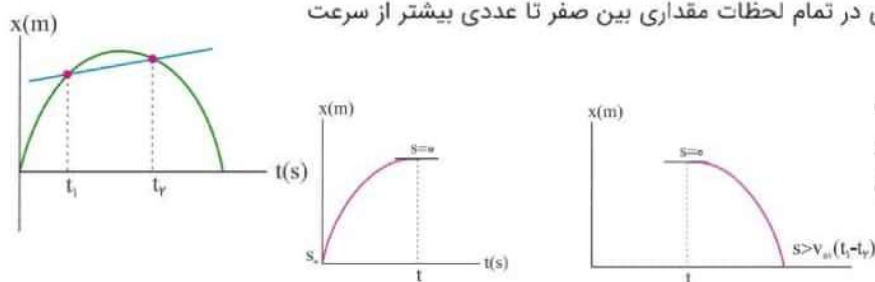
$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{6}{5} = 1.2 \Rightarrow T = \frac{t}{n} \Rightarrow n = \frac{60}{1.2} = 50$$

تعداد نوسان ۵۰ تا و تعداد دفعاتی که طول پاره خط طی می‌شود ۱۰۰ بار است.

شیب خط بین دو لحظه t_1 و t_2 برابر با سرعت متوسط در این بازه است.

اگر نمودار را به دو قسمت تقسیم کنیم، در هر قسمت تندى در تمام لحظات مقداری بین صفر تا عددی بیشتر از سرعت متوسط بازه $(t_1 - t_2)$ است.

بنابراین در هر قسمت یک لحظه یافت می‌شود که در آن تندى با سرعت متوسط در بازه $(t_1 - t_2)$ برابر است و در مجموع در دو لحظه تندى با سرعت متوسط در بازه $(t_1 - t_2)$ برابر است.



برای هسته‌های سبک، کاستی جرم هسته بیشتر است؛ در نتیجه انرژی بستگی هسته که همان مقدار انرژی لازم برای تقسیم هسته به نوکلئون‌های تشکیل‌دهنده آن است، بیشتر است.

گام اول

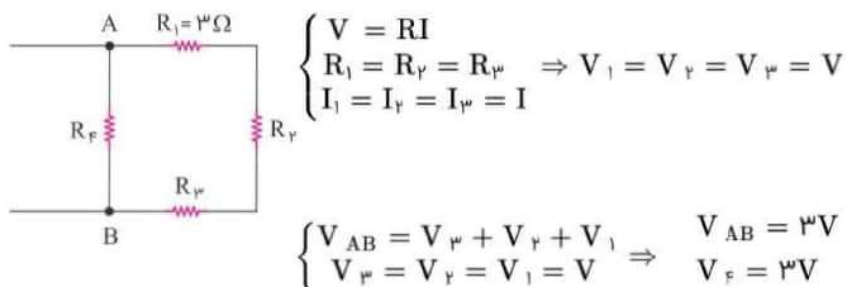
الف) توان مصرفی هریک از مقاومت‌ها باهم برابر است $\leftarrow P_1 = P_2 = P_3 = P_4$
 ب) مقاومت معادل مدار چند اهم است $\leftarrow R_T = ? \Omega$

گام دوم

مقاومت‌های R_1, R_2, R_3 باهم سری هستند؛ بنابراین:

$$\begin{cases} P_1 = P_2 = P_3 \\ I_1 = I_2 = I_3 = I \\ P_3 = R_3 I^2 \\ R_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_1 I^2 = R_2 I^2 = R_3 I^2 \\ R_1 = R_2 = R_3 = 3 \Omega \end{cases}$$

از آنجاکه مقاومت‌ها باهم برابر هستند و جریان عبوری از آن‌ها یکسان است، اختلاف پتانسیل تمامی آن‌ها یکسان است.



اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت R_F برابر است:

باتوجه به اینکه توان مقاومت R_F با مقاومت R_1 برابر است می‌توانیم مقاومت R_F را محاسبه کنیم.

$$\begin{cases} P_F = P_1 \\ P = \frac{V^2}{R} \\ V_1 = V, V_F = 3V, R_1 = 3 \Omega \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{V_F^2}{R_F} = \frac{V_1^2}{R_1} \\ \frac{9V^2}{R_F} = \frac{V^2}{3} \\ R_F = 27 \Omega \end{cases}$$

حالا می‌توانیم مقاومت معادل را محاسبه کنیم. مقاومت‌های R_3, R_2, R_1 باهم سری و برابر ۳ اهم هستند.

$$\begin{cases} R_{1,2,3} = R_1 + R_2 + R_3 \\ R_1 = R_2 = R_3 \end{cases} \Rightarrow R_{1,2,3} = 9 \Omega$$

مقاومت معادل $R_{1,2,3}$ با مقاومت R_F باهم موازی هستند؛ بنابراین:

$$\begin{cases} \frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_{1,2,3}} + \frac{1}{R_F} \\ R_{1,2,3} = 9 \Omega \\ R_F = 27 \Omega \end{cases} \Rightarrow R_T = \frac{9 \times 27}{9 + 27} = \frac{27}{4} \Omega$$

$$\lambda = \lambda_0 - \frac{1}{F} \lambda_0 = \frac{1}{F} \lambda_0$$

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n} \Rightarrow \frac{1}{F} \lambda_0 = \frac{\lambda_0}{n} \Rightarrow n = \frac{1}{F}$$

$$v = \frac{c}{n} \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{F}} = \frac{F}{1} = \frac{3}{5 \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

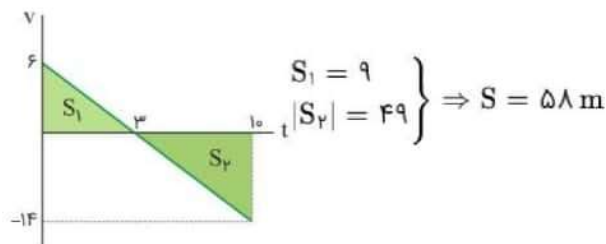
باتوجه به ماکزیمم سهمی می‌توانیم سرعت اولیه و شتاب حرکت را محاسبه کنیم:

$$\Delta x = \frac{v + v_0}{2} \Delta t$$

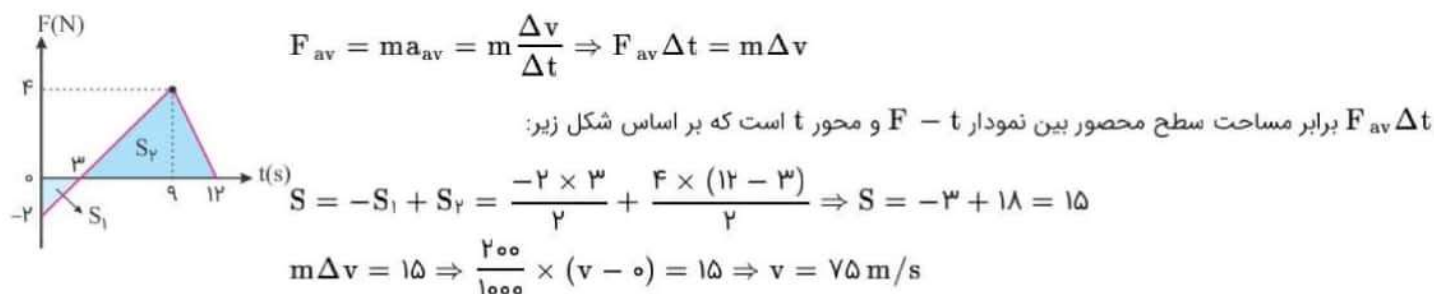
$$36 - 27 = \frac{0 + v_0}{2} \times 3 \Rightarrow v_0 = 6 \text{ m/s}$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow 0 = a \times 3 + 6 \Rightarrow a = -2 \text{ m/s}^2$$

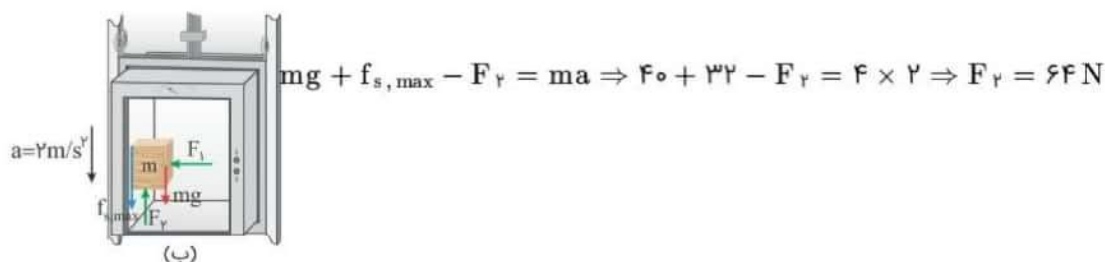
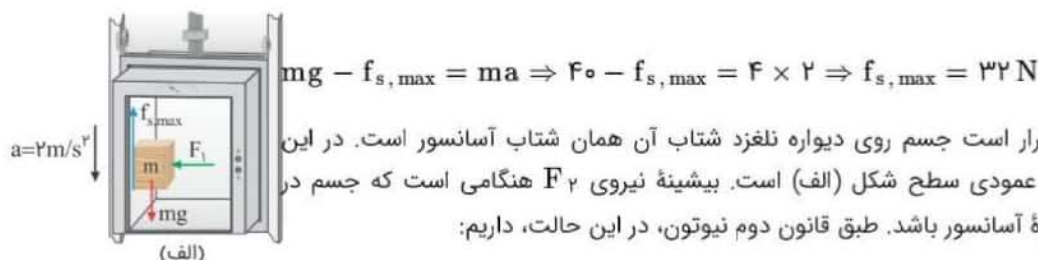
کافی است نمودار سرعت-زمان را رسم کنیم:



بر اساس قانون دوم نیوتون:



ابتدا در شکل (الف)، بزرگی نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه را به دست می‌آوریم. چون جسم در آستانه لغزش است، نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه به آن وارد می‌شود. حرکت آسانسور تندشونده است، پس بردار شتاب هم‌جهت با بردار سرعت و به سمت پایین است. بنابراین:



اگر جابه‌جایی در ۴ ثانیه اول حرکت X_1 باشد، جابه‌جایی در ۴ ثانیه دوم $X_1 + 16a$ و جابه‌جایی در چهار ثانیه سوم $X_1 + 32a$ و جابه‌جایی در چهار ثانیه چهارم $X_1 + 48a$ است. با توجه به صورت سؤال می‌توان نوشت:

$$X_1 = (X_1 + 16a) + (X_1 + 32a) + (X_1 + 48a)$$

$$\xrightarrow{X_1=200\text{ m}} 200 = 600 + 96a \Rightarrow a = -\frac{400}{96} \text{ m/s}^2$$

$$\Rightarrow |a| = \frac{400}{96} = \frac{25}{6} \text{ m/s}^2$$

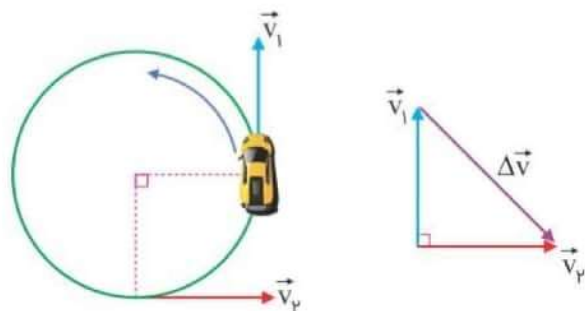
ابتدا مسافت طی‌شده توسط اتومبیل را در مدت $13/5$ ثانیه حساب می‌کنیم.

$$s = \frac{\ell}{\Delta t} \Rightarrow (72 \div 3/6) = \frac{\ell}{13/5} \Rightarrow \ell = 270 \text{ m}$$

حساب می‌کنیم که مسافت طی‌شده چند برابر محیط میدان است، تا تعداد دور طی‌شده به دست بیاید.

$$n = \frac{\ell}{\text{محیط}} = \frac{270}{2\pi R} = \frac{270}{2 \times 3 \times 60} = \frac{3}{4}$$

بردارهای سرعت اولیه و نهایی در این بازه زمانی به صورت شکل زیر است. با توجه به شکل بردار تفاضل سرعت‌ها برابر است با:



$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \Rightarrow |\Delta \vec{v}| = \sqrt{2}v = 20\sqrt{2} \text{ m/s}$$

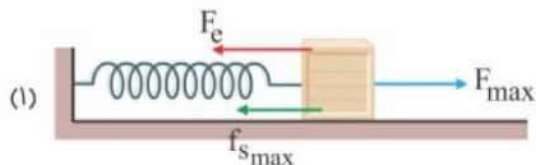
حالا در نهایت از رابطه $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ استفاده می‌کنیم تا بزرگی شتاب متوسط در این بازه به دست بیاید.

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{20\sqrt{2}}{13/5} = \frac{40\sqrt{2}}{13} \text{ m/s}^2$$

دقت کنید که فقط ذکر شده که جسم ساکن است و می‌توان دو حالت کلی زیر را در نظر گرفت:
الف) جسم ساکن و در آستانه حرکت به طرف راست باشد، در این حالت بیشترین نیروی F بر جسم اثر می‌کند و مطابق شکل (۱) می‌توان نوشت:

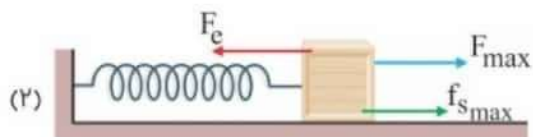
$$F_{\max} = f_{s\max} + F_e = \mu_s F_N + kx$$

$$F_{\max} = 0.4 \times 20 + 4 \times 5 = 28 \text{ N}$$



ب) جسم ساکن و در آستانه حرکت به طرف چپ باشد و در این حالت، نیروی F کمترین مقدار ممکن را دارد و مطابق شکل (۲) می‌توان نوشت:

$$F_{\min} + f_{s\max} = F_e \Rightarrow F_{\min} = 4 \times 5 - 0.4 \times 20 = 12 \text{ N}$$

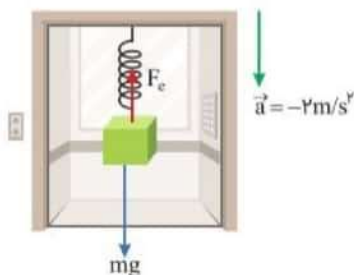


بنابراین نیروی F می‌تواند در بازه مقادیر زیر باشد:

$$12 \leq F \leq 28$$

پس نیروی ۱۵ نیوتن می‌تواند پاسخ درست باشد.

با استفاده از شکل نیروهای وارد بر جسم و قانون دوم نیوتون تغییر طول فنر را حساب می‌کنیم:



$$a = \frac{F_{\text{net}}}{m} = \frac{mg - kx}{m} \Rightarrow 2 = \frac{5 \times 10 - 100x}{5}$$

$$\Rightarrow 10 = 50 - 100x \Rightarrow -40 = -100x \Rightarrow x = 0.4 \text{ m} = 40 \text{ cm}$$

در این صورت طول نهایی فنر برابر است با:

$$x_2 - x_1 = 40 \Rightarrow x_2 - 10 = 40 \Rightarrow x_2 = 50 \text{ cm}$$

شتاب حرکت جسمی به جرم m که در هوا به سمت بالا پرتاب می‌شود و نیروی مقاومت هوا در برابر حرکت آن F_D است، به هنگام بالا رفتن، در نقطه اوج و به هنگام پایین آمدن برابر است با:

$$a_{\text{بالا}} = g + \frac{F_D}{m} \quad (\text{I})$$

$$a_{\text{اوج}} = g \quad (\text{II})$$

$$a_{\text{پایین}} = g - \frac{F_D}{m} \quad (\text{III})$$

تحقیق درستی روابط بالا بر عهده دانش‌آموز است.

چون بیشینه مقاومت هوا در برابر حرکت جسم $\frac{1}{5}$ وزن جسم است، باتوجه به روابط بالا، داریم:

$$F_{D, \max} = \frac{1}{5}mg$$

$$(\text{I}) : a_{\max} = g + \frac{F_{D, \max}}{m} = g + \frac{\frac{1}{5}mg}{m} = g + \frac{1}{5}g = \frac{1}{2}g = \frac{1}{2} \times 10 = 12 \text{ m/s}^2$$

$$(\text{II}) : a_{\min} = g - \frac{F_{D, \max}}{m} = g - \frac{\frac{1}{5}mg}{m} = g - \frac{1}{5}g = \frac{4}{5}g = \frac{4}{5} \times 10 = 8 \text{ m/s}^2$$

مورد الف: باتوجه به شکل، هرچه از سطح زمین به طرف بالا حرکت می‌کنیم، چگالی و فشار هوا کاهش می‌یابد که نهایتاً در بیرون از جو زمین این مقدار به صفر نزدیک می‌شود.
مورد (ب):

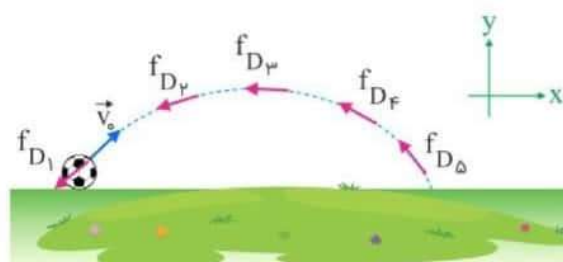
$$\left. \begin{aligned} P_{\text{سطح زمین تا جو}} &= \frac{mg}{A} = 100 \text{ kPa} \Rightarrow m_{\text{کل}} = 10000A \text{ (kg)} \\ P_{\text{جو تا } 9 \text{ km}} &= \frac{mg}{A} = 30 \text{ kPa} \Rightarrow m_a = 3000A \text{ (K)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 9 \text{ km} = 7000A \text{ (kg)}$$

$$\text{در نهایت: } \frac{7000A}{10000A} \times 100 = 70\%$$

مورد (ج):

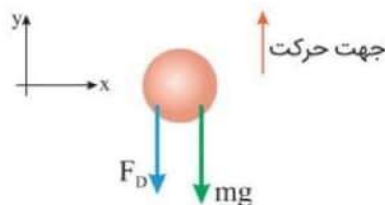
$$\Delta P = \rho_{\text{av}} g \Delta h \Rightarrow \frac{\Delta P_1}{\Delta P_2} = \frac{\rho_{\text{av}_1}}{\rho_{\text{av}_2}} \times \frac{\Delta h_1}{\Delta h_2} \Rightarrow \frac{20}{30} = \frac{\rho_{\text{av}_1}}{\rho_{\text{av}_2}} \times \frac{6}{3} \Rightarrow \frac{\rho_{\text{av}_1}}{\rho_{\text{av}_2}} = \frac{1}{3}$$

مسیر حرکت گلوله به صورت شکل زیر است. چون بردار سرعت در هر لحظه بر مسیر مماس است و بردار نیروی مقاومت هوا در خلاف جهت بردار سرعت است، بردار نیروی مقاومت هوا در لحظات مختلف به صورت شکل زیر است.



باتوجه به شکل، زاویه بین F_D و جهت مثبت محور y با گذشت زمان کاهش می‌یابد.

در مسیر رفت، نیروهای وارد بر جسم را رسم کرده و شتاب را به دست می‌آوریم:



$$-mg - f_D = ma_1 \Rightarrow -mg - \frac{1}{F}mg = ma_1 \Rightarrow a_1 = -\frac{5}{F}g$$

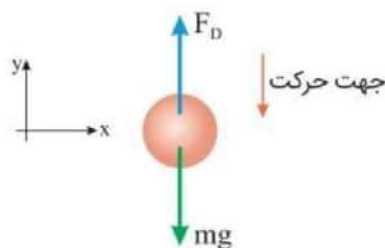
حالا معادله مستقل از سرعت اولیه را می‌نویسیم و a_1 را جایگذاری می‌کنیم:

$$\Delta x = -\frac{1}{\gamma}at^{\gamma} + vt$$

پس از جابه‌جایی به اندازه h ، سرعت صفر می‌شود؛ پس:

$$h = -\frac{1}{\gamma}\left(-\frac{5}{F}g\right)t_1^{\gamma} + 0 \Rightarrow h = \frac{5}{\lambda}t_1^{\gamma} \quad (1)$$

در مسیر برگشت نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم و a_2 را به دست می‌آوریم:



$$f_D - mg = ma_2 \Rightarrow \frac{1}{F}mg - mg = ma_2 \Rightarrow a_2 = -\frac{3}{F}g$$

در مسیر برگشت سرعت اولیه صفر و جابه‌جایی $(-h)$ است؛ پس از معادله مکان-زمان داریم:

$$\Delta x = \frac{1}{\gamma}at^{\gamma} + v_0t$$

$$-h = \frac{1}{\gamma}\left(-\frac{3}{F}g\right)t_2^{\gamma} + 0 \Rightarrow h = \frac{3}{\lambda}t_2^{\gamma} \quad (2)$$

حالا از معادله‌های (۱) و (۲) نسبت $\frac{t_2}{t_1}$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{3}{\lambda}t_2^{\gamma} = \frac{5}{\lambda}t_1^{\gamma} \Rightarrow \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{\gamma} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{t_2}{t_1} = \sqrt{\frac{5}{3}}$$

برای محاسبه تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی می‌توان نوشت:

جابه‌جایی در راستای میدان

جابه‌جایی در راستای میدان

$$|\Delta U_{ABC}| = |q|E(d - d \cos \alpha) = 5 \times 10^{-6} \times 10^5 \times 0.5(1 - 0.6)$$

$$\Rightarrow |\Delta U| = 10^{-1} \text{ J} = 0.1 \text{ J}$$

بار منفی در جهت میدان حرکت کرده است، پس $\Delta U > 0$ است. بنابراین:

$$\Delta U = +0.1 \text{ J}$$

ابتدا حجم ظاهری کره را به دست می‌آوریم که برابر با حجم آب جابه‌جا شده است. حجم کل ظرف 500 cm^3 است که به اندازه $150 \text{ cm}^3 = 500 - 350$ از آن خالی است و هنگامی که کره در ظرف قرار می‌گیرد، 20 cm^3 آب از آن سرریز می‌کند.

$$\Rightarrow V_{\text{ظاهری کره}} = 150 + 20 = 170 \text{ cm}^3$$

حجم حفره درون کره، برابر با اختلاف حجم ظاهری کره با حجم قسمتی از کره است که توسط ماده پر شده است.

$$V_{\text{حفره}} = V_{\text{ظاهری}} - \frac{m}{\rho} \Rightarrow V_{\text{حفره}} = 170 - \frac{1200}{10} = 50 \text{ cm}^3$$

گزینه ۱: بنابر نظریه کلاسیک با افزایش شدت تابش در یک بسامد معین از سطح هر فلزی الکترون می‌توان جدا کرد.

گزینه ۲: بنابر نظریه انیشتین اگر بسامدی می‌تواند الکترون از سطح فلز جدا کند، با افزایش آن انرژی جنبشی الکترون‌های جدا شده افزایش می‌یابد نه تعداد آن‌ها.

گزینه ۳: درست است.

گزینه ۴: بنابر نظریه انیشتین اگر شدت تابش در یک بسامد معین افزایش یابد تعداد الکترون‌های جدا شده از سطح فلز افزایش می‌یابد.

از رابطه خازن و ظرفیت خازن استفاده می‌کنیم:

$$Q_1 = CV_1 \Rightarrow Q_1 = 10 \times 10^{-12} \times 12 = 120 \times 10^{-12} \text{ C}$$

باتوجه به رابطه $C = k\epsilon_0 \frac{A}{d}$ اگر فاصله دو صفحه خازن را نصف کنیم، ظرفیت خازن دو برابر می‌شود؛ یعنی بار خازن نیز دو برابر می‌شود، پس داریم:

$$Q_2 = 2 \times 120 \times 10^{-12} \text{ C} \Rightarrow Q_2 = 2/4 \times 10^{-10} \times 10^{+6} = 2/4 \times 10^{-4} \mu\text{C}$$

گام اول

هنگام گذار الکترون از مدار n_2 به n_1 فوتونی با انرژی $۱۲/۷۵$ الکترون‌ولت تابش می‌شود، n_1 و n_2 کدام‌اند؟
 $\Delta E = ۱۲/۷۵ \text{ eV}$, $n_2 = ?$, $n_1 = ?$ ←

گام دوم

به کمک رابطه $\Delta E = -\frac{E_R}{n_2^2} - \frac{-E_R}{n_1^2}$ ، n_1 و n_2 را تعیین می‌کنیم:

$$\Delta E = \frac{-E_R}{n_2^2} - \frac{E_R}{n_1^2} \Rightarrow ۱۲/۷۵ = -۱۳/۶ \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) \Rightarrow \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} = \frac{۱۵}{۱۶} \Rightarrow \begin{cases} n_1 = ۱ \\ n_2 = ۴ \end{cases}$$

شیمی

در هر ۳۰ دقیقه ۵۰٪ یا $\frac{1}{2}$ آن کم می‌شود و وقتی ماده $۹۶/۸۷۵$ ٪ اش تجزیه شود، یعنی $۳/۱۲۵$ ٪ آن باقی مانده است که معادل $\frac{1}{۳۳}$ می‌باشد.

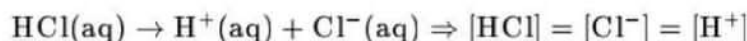
$$\text{I) } ۱ \text{ mol} \xrightarrow{۳۰'} \frac{1}{2} \text{ mol} \xrightarrow{۳۰'} \frac{1}{4} \xrightarrow{۳۰'} \frac{1}{8} \xrightarrow{۳۰'} \frac{1}{۱۶} \xrightarrow{۳۰'} \frac{1}{۳۲}$$

$$۵ \times ۳۰ \text{ min} = ۱۵۰ \text{ min} \Leftrightarrow ۲/\Delta h$$

$$\text{II) } \Delta H_{\text{واکنش}} = ۲(\Delta H_{(X-Y)}) - (\Delta H_{(X-X)} + \Delta H_{(Y-Y)})$$

طبق صورت سوال آنتالپی $(X-Y) < (X-X) + (Y-Y)$ ، پس ΔH واکنش منفی و گرماده است.

ابتدا غلظت مولی دو محلول غلیظ و رقیق هیدروکلریک‌اسید را حساب می‌کنیم. توجه داشته باشید که هیدروکلریک‌اسید، یک اسید قوی تک‌پروتون‌دار است که به دلیل یونش کامل، غلظت یون‌های Cl^- و H^+ آن با غلظت اولیه اسید برابر است.



$$M_{\text{HCl غلیظ}} = \frac{\text{load}}{\text{جرم مولی}} \Rightarrow \frac{۱۰ \times ۳۶/۵ \times ۱/۲}{۳۶/۵} = ۱۲ \text{ mol.L}^{-1}$$

$$M_{\text{HCl رقیق}} = \frac{\text{load}}{\text{جرم مولی}} \Rightarrow \frac{۱۰ \times ۰/۰۱۰۹۵ \times ۱}{۳۵/۵} = ۰/۰۰۳ \text{ mol.L}^{-1}$$

(*) محلولی با غلظت $۱۰۹/۵ \text{ ppm}$ معادل $۰/۰۱۰۹۵$ درصد جرمی است.

سپس با استفاده از رابطه زیر، غلظت محلول غلیظ اولیه را به دست می‌آوریم:

$$M_{\text{غلظ}} V_{\text{غلظ}} = M_{\text{رقیق}} V_{\text{رقیق}} \Rightarrow ۱۲ \times V_{\text{غلظ}} = ۰/۰۰۳ \times ۱۰$$

$$V_{\text{غلظ}} = ۰/۰۰۲۵ \text{ L} \simeq ۲/۵ \text{ mL}$$



الف) درست. فرآورده (I) متانول، دارای ۶ اتم در مولکول خود است و در اتن C_2H_4 ، ۶ پیوند کووالانسی (اشتراکی) وجود دارد.

ب) درست. برای تهیه متانول، ابتدا از طریق واکنش (ب) مواد اولیه موردنیاز جهت تولید متانول به دست می‌آید.

ج) نادرست. عدد اکسایش اتم هیدروژن در H_2 برابر با صفر است ولی در ترکیب متانول، عدد اکسایش هیدروژن برابر با (+۱) است؛ یعنی عدد اکسایش آن افزایش می‌یابد.

عدد اکسایش کربن در متان (-۴) است ولی در CO برابر با (+۲) است؛ یعنی عدد اکسایش کربن افزایش یافته است.

د) نادرست. عدد اکسایش کربن در CO برابر با (+۲) و در متانول برابر با (-۲) است و میزان تغییر درجه برای کربن (+۴) است. $+۲ - (-۲) = ۴$ و نفتان دارای پنج پیوند دوگانه است.

هـ) درست. این واکنش‌ها روشی است که در صنعت از این روش متانول به دست می‌آید.

بررسی عبارت‌های نادرست:

ب) نفت خام مخلوطی از هیدروکربن‌ها (هم سیرشده و هم سیرنشده)، برخی نمک‌ها، اسیدها، آب و ... است.

ت) پس از جدا کردن اسیدها و آب، نفت خام را پالایش می‌کنند.

ترکیب شماره (II) همان اتیلن گلیکول به فرمول $\text{C}_2\text{H}_4(\text{OH})_2$ است.

$$\text{درصد جرمی اکسیژن} = \frac{2 \times 16}{62} \times 100 = 51.6\%$$

جمله درست است.

ب) گاز اتن (C_2H_4) در اثر واکنش با محلول آبی و رقیق پتاسیم پرمنگنات در شرایط مناسب به اتیلن گلیکول تبدیل می‌شود.

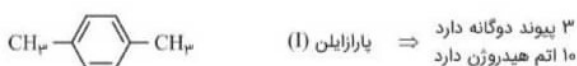
جمله نادرست است.

ج) پارازایلن ترکیبی است که در نفت خام یافت می‌شود. (درست)

د) پلیمر پلی اتیلن ترفتالات (PET) همانند پلیمرهای سنتزی، ماندگاری زیادی دارد و در $\text{H}_2\text{C}=\text{CH}_2 + (\text{KMnO}_4)$ اکسند $\text{H}_2\text{C}-\text{CH}_2$ $\begin{matrix} \text{OH} & \text{OH} \\ | & | \end{matrix}$

طبیعت به‌کندی تجزیه می‌شود. به همین دلیل پسماند آن تهدیدی جدی برای زندگی روی کره زمین است. (درست)

هـ) درست است.





باتوجه به تغییر عدد اکسایش، هر مول روی ۲ مول الکترون از دست می‌دهد.

$$\begin{aligned} \text{روز} = 0.75 \text{ g Zn} \times \frac{100}{100} \times \frac{1 \text{ mol Zn}}{65 \text{ g Zn}} \times \frac{2 \text{ mole}^-}{1 \text{ mol Zn}} \times \frac{6.02 \times 10^{23} \text{ e}^-}{1 \text{ mole}^-} \times \frac{1 \text{ s}}{5 \times 10^{15} \text{ e}^-} \\ \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \times \frac{1 \text{ h}}{60 \text{ min}} \times \frac{1 \text{ روز}}{24 \text{ h}} = 25/7 \text{ روز} \end{aligned}$$

بررسی موارد:

الف) درست. افزایش دما و اعمال فشار مستلزم صرف انرژی و هزینه است؛ بنابراین شرایط بهینه شرایطی است که واکنش در حد امکان در فشار و دمای پایین انجام شود.

ب) نادرست. در سوختن هیدروژن، اعمال گرما (ایجاد جرقه) آنتالپی را تغییر نمی‌دهد (افزایش محسوس گرما به منظور افزایش سرعت واکنش می‌تواند آنتالپی واکنش‌ها را تغییر دهد).

پ) درست. کاتالیزگر با کاهش انرژی فعالسازی زمان انجام واکنش را نیز کوتاه نموده، به همین دلیل سرعت افزایش می‌یابد.

ت) درست. گرما انرژی فعالسازی را کاهش نمی‌دهد بلکه تأمین می‌کند. وقتی کاتالیزگر انرژی فعالسازی را کاهش دهد، بنابراین مقدار گرمای کمتری نیاز است تا برای انجام واکنش تأمین شود. از این رو واکنش در دمای پایین‌تر انجام خواهد شد.

$$\text{Na}_2\text{O} \Rightarrow \frac{\text{شمار کاتیون}}{\text{شمار آنیون}} = \frac{2}{1} = 2$$

سدیم اکسید

بررسی موارد:

$$\text{MgCl}_2 \Rightarrow \frac{\text{شمار کاتیون}}{\text{شمار آنیون}} = \frac{1}{2} \times$$

$$\text{K}_2\text{S} \Rightarrow \frac{\text{شمار کاتیون}}{\text{شمار آنیون}} = 2 \quad \checkmark$$

$$\text{CaBr}_2 \Rightarrow \frac{\text{شمار کاتیون}}{\text{شمار آنیون}} = \frac{1}{2} \times$$

$$\text{LiI} \Rightarrow \frac{\text{شمار کاتیون}}{\text{شمار آنیون}} = 1 \times$$

لیتیم یدید

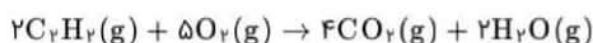
می‌دانیم واکنش تخمیر بی‌هوازی گلوکز به صورت زیر است:



می‌توانیم از جرم اتانول به تعداد مول CO_2 برسیم:

$$? \text{ mol CO}_2 = 11/5 \text{ g C}_2\text{H}_5\text{OH} \times \frac{1 \text{ mol C}_2\text{H}_5\text{OH}}{46 \text{ g C}_2\text{H}_5\text{OH}} \times \frac{2 \text{ mol CO}_2}{2 \text{ mol C}_2\text{H}_5\text{OH}} = 0/25 \text{ mol CO}_2$$

- دقت کنید که بازده واکنش (۱) نقشی در محاسبات ما ندارد چون هر دو ماده $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$ و CO_2 فرآورده هستند. درواقع ۱۱/۵ گرم اتانول، مقدار عملی واکنش (۱) بوده که در ابتدا با در نظر گرفته شدن بازده درصدی واکنش از گلوکز به دست آمده است.



اول مقدار نظری CO_2 را حساب می‌کنیم:

$$\text{مقدار نظری} = \frac{\text{مقدار عملی}}{\text{بازده درصدی}} \times 100 \Rightarrow 52 = \frac{0/25 \text{ mol}}{\text{مقدار نظری}} \times 100 \Rightarrow \text{مقدار نظری} = \frac{25}{52} \text{ mol CO}_2$$

حال با استفاده از مقدار نظری CO_2 ، جرم گاز اتین موردنیاز را حساب می‌کنیم:

$$? \text{ g C}_2\text{H}_2 = \frac{25}{52} \text{ mol CO}_2 \times \frac{2 \text{ mol C}_2\text{H}_2}{4 \text{ mol CO}_2} \times \frac{26 \text{ g C}_2\text{H}_2}{1 \text{ mol C}_2\text{H}_2} = 6/25 \text{ g C}_2\text{H}_2$$

راه دوم: تکنیک: $\frac{\text{مول}}{\text{ضریب}}$

ابتدا با استفاده از رابطه زیر، مول CO_2 را حساب می‌کنیم:

$$\frac{\text{گرم C}_2\text{H}_5\text{OH}}{\text{C}_2\text{H}_5\text{OH مولی} \times \text{ضریب C}_2\text{H}_5\text{OH}} = \frac{\text{مول CO}_2}{\text{ضریب CO}_2}$$

$$\Rightarrow \frac{11/5}{46 \times 2} = \frac{\text{مول CO}_2}{2} \Rightarrow \text{مول CO}_2 = 0/25 \text{ mol}$$

حال با استفاده از رابطه زیر، جرم C_2H_2 را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\text{گرم C}_2\text{H}_2}{\text{C}_2\text{H}_2 \text{ مولی} \times \text{ضریب C}_2\text{H}_2} \times \frac{\text{بازده}}{100} = \frac{\text{مول CO}_2}{\text{ضریب CO}_2}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{C}_2\text{H}_2}{26 \times 2} \times \frac{52}{100} = \frac{0/25}{4} \Rightarrow \text{گرم C}_2\text{H}_2 = 6/25 \text{ g}$$

بخش اول:

برای تعیین غلظت مولی یون برمید، می‌بایست تعداد مول‌های این یون را در یک لیتر از محلول (آب دریا) حساب کنیم:

$$? \text{ mol Br}^- = 1 \text{ L آب دریا} \times \frac{1000 \text{ mL}}{1 \text{ L آب دریا}} \times \frac{1/1 \text{ g آب دریا}}{1 \text{ mL}} \times \frac{60 \text{ g Br}^-}{10^6 \text{ g آب دریا}}$$

$$\times \frac{1 \text{ mol Br}^-}{80 \text{ g}} = 8/25 \times 10^{-6} \text{ mol Br}^- \Rightarrow M_{\text{Br}^-} = 8/25 \times 10^{-6} \text{ mol.L}^{-1}$$

بخش دوم:

$$? \text{ ton آب دریا} = 1 \text{ kg Br}^- \times \frac{1 \text{ kg Br}^-}{1 \text{ kg Br}^-} \times \frac{10^6 \text{ kg آب دریا}}{60 \text{ kg Br}^-} \times \frac{1 \text{ ton آب دریا}}{10^3 \text{ kg آب دریا}} \times \frac{100}{83} = 20 \text{ ton}$$

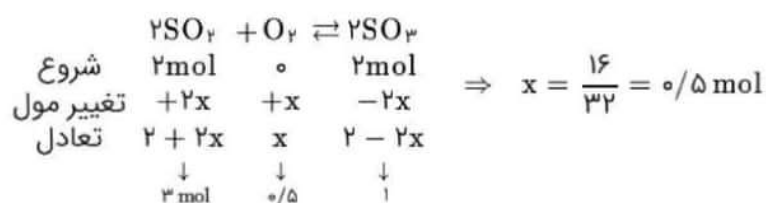
گام ۱: موازنه معادله:



گام ۲: محاسبه اینکه با تولید ۴۵ لیتر اکسیژن، چند مول KCl تولید می‌شود:

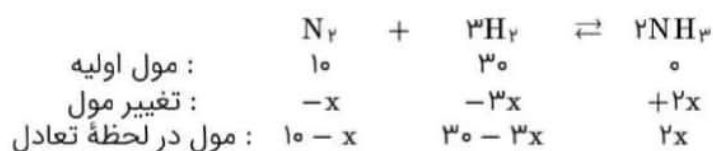
$$\frac{\text{مول}}{\text{ضریب}} = \frac{\text{چگالی} \times \text{حجم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{x \text{ mol KCl}}{2} = \frac{45 \text{ L} \times 1/28 \frac{\text{g}}{\text{L}} \text{O}_2}{3 \times 32} \Rightarrow x = 1/2 \text{ mol}$$

گام ۳: از روی نمودار می‌بینیم که بعد از ۳۰ s، ۱/۲ مول KCl تولید می‌شود.

چون در شروع، گاز O_۲ در ظرف وجود ندارد، پس واکنش در جهت برگشت پیش می‌رود تا به تعادل برسد:

$$K = \frac{[\text{SO}_3]^2}{[\text{SO}_2]^2 [\text{O}_2]^1} = \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^2}{\left(\frac{3}{10}\right)^2 \left(\frac{0/5}{10}\right)} \simeq 2/2 \text{ L.mol}^{-1}$$

در فرآیند هابر در شرایط بهینه، ۲۸ درصد مخلوط تعادلی را آمونیاک تشکیل می‌دهد بنابراین:

مجموع مول مواد موجود در ظرف: $10 - x + 30 - 3x + 2x = 40 - 2x$

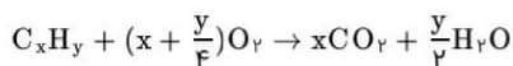
$$\text{درصد مولی آمونیاک} : \frac{2x}{40 - 2x} \times 100 \Rightarrow 28 = \frac{2x}{40 - 2x} \Rightarrow 112x = 560 \Rightarrow x = 4/375$$

$$\text{mol NH}_3 = 2x = 2(4/375) = 8/375 \text{ mol}$$

$$8/375 \text{ mol NH}_3 \times \frac{17 \text{ g NH}_3}{1 \text{ mol NH}_3} = 148/375 \text{ g NH}_3$$

در بین عناصر دوره چهاردهم جدول تناوبی عناصر Pb و Sn در اثر ضربه شکل‌پذیرند و عناصر Si و Ge رسانایی الکتریکی کمی دارند.

معادله عمومی سوختن هیدروکربن‌ها در حالت کلی به صورت زیر است:



باتوجه به ضرایب در معادله واکنش داده شده در سوال داریم:

$$\frac{y}{2} = 10 \Rightarrow y = 20 \quad \text{اتم هیدروژن}$$

$$x + \frac{y}{4} = 19 \Rightarrow x + \frac{20}{4} = 19 \Rightarrow x = 14 \quad \text{اتم کربن}$$

$$\text{فرمول هیدروکربن: } C_{14}H_{20} \Rightarrow x + y = 34$$

باتوجه به اینکه ترکیب فوق نسبت به آلکان ۱۴کربنه ($C_{14}H_{30}$) ۱۰ اتم هیدروژن کمتر دارد، پس می‌توان نتیجه گرفت این هیدروکربن سیرنشده، ۵ پیوند دوگانه دارد.

* هر پیوند دوگانه که به جای پیوند یگانه قرار بگیرد، تعداد هیدروژن‌ها ۲ واحد کم می‌شود.

* هر پیوند سه‌گانه که به جای پیوند یگانه قرار بگیرد، تعداد هیدروژن‌ها ۴ واحد کم می‌شود.

در این سوال اگر آلکان داشتیم $C_{14}H_{30}$ بود ولی $C_{14}H_{20}$ داریم، یعنی ۱۰ هیدروژن کمتر از ترکیبات آلکان؛ در نتیجه چند حالت امکان‌پذیر است (مثل دو پیوند سه‌گانه و یک دوگانه، ۵ پیوند دوگانه و ...) که در بین گزینه‌ها ۵ پیوند دوگانه داریم.

گام ۱: ۵ g از ترکیب با گرفتن $J \ 36 = 12 - 48$ گرما، $3 = 14 - 17$ درجه سلسیوس تغییر دما داده است؛ پس:

$$Q = mc\Delta\theta \Rightarrow 36 = 5 \times c \times 3 \Rightarrow c = 2/4 J.g^{-1}.^{\circ}C^{-1}$$

ظرفیت گرمایی ویژه: c

گام ۲: باتوجه به سوال ظرفیت گرمایی ۱ مول ترکیب برابر است با:

$$4 \times 37/2 = 148/8 J.K^{-1} = 148/8 J.^{\circ}C^{-1}$$

گام ۳:

$$\text{ظرفیت گرمایی یک مول} = \frac{\text{ظرفیت گرمایی ویژه}}{\text{جرم مولی}} = \frac{148/8}{2/4} = 62 g.mol^{-1}$$

همه عبارت‌های درست هستند.

الف) چگالی بار هر یون هم‌ارز با نسبت بار به حجم آن است، ولی از کمیت ساده‌تری برای مقایسه میزان برهم‌کنش‌های میان یون‌ها استفاده می‌شود که نسبت مقدار بار یون به شعاع آن می‌باشد. چگالی بار یون با نسبت بار به شعاع آن متناسب است.

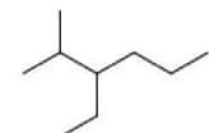
ب) در هر دوره کوچک‌ترین آنیون (هالید) شعاع بزرگ‌تری از بزرگ‌ترین کاتیون (کاتیون قلیایی) دارد. بنابراین شعاع F^- بزرگ‌تر از Li^+ بوده و چگالی بار کمتری دارد.

پ) یون‌های F^- و Na^+ هم‌الکترون هستند، اما چون عدد اتمی F^- کوچک‌تر است، شعاع بزرگ‌تری داشته و نسبت بار به شعاع و همچنین چگالی بار کمتری نسبت به Na^+ دارد.

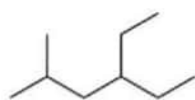
ت) باتوجه به جدول زیر در کتاب درسی، این عبارت درست است.

آنیون — کاتیون	F^-	O^{2-}
Na^+	۹۲۶	۲۴۸۸
Mg^{2+}	۲۹۶۵	۳۷۹۸

ترکیب موردنظر باید دو کربن از ۲- متیل هگزان بیشتر داشته باشد که این دو کربن به صورت یک شاخه اتیل یا دو شاخه متیل به ترکیب اضافه می‌شوند. حالت با دو شاخه متیل ممکن نیست چرا که اگر چنین می‌بود باید در نام‌گذاری ترکیب قبل از متیل پیشوندهای "دی" یا "تری" می‌آمد که چنین نیست؛ پس ترکیب یک شاخه اتیل اضافه بر متیل خود دارد. تمام حالات ممکن را رسم کرده‌ایم:



۳- اتیل - ۲- متیل هگزان



۴- اتیل - ۲- متیل هگزن

توجه: ترکیبات ۲- اتیل - ۲- متیل هگزان و ۵- اتیل - ۲- متیل هگزان وجود ندارند چرا که نام‌گذاری درست آن‌ها به این شکل نیست.

با استفاده از رابطه زیر، یک بار برای روزهای شنبه تا سه‌شنبه و یک بار هم برای روزهای چهارشنبه تا جمعه، جرم Fe را حساب می‌کنیم:

$$\frac{\text{جرم Fe}}{\text{ضریب Fe} \times \text{جرم مولی Fe}} = \frac{\text{بازده}}{100} \times \frac{\text{درصد خلوص}}{100} \times \text{جرم Fe}_2\text{O}_3 \text{ ناخالص}$$

$$\text{ضریب Fe} \times \text{جرم مولی Fe} = \frac{\text{جرم Fe}_2\text{O}_3 \times \text{ضریب Fe}_2\text{O}_3}{\text{بازده}} \times \frac{100}{\text{درصد خلوص}}$$

جرم Fe₂O₃ را برحسب ton قرار می‌دهیم تا جرم Fe هم برحسب ton به دست بیاید.



روزهای شنبه تا سه‌شنبه:

$$\frac{20 \times \frac{80}{100}}{160 \times 2} \times \frac{70}{100} = \frac{x}{56 \times 4} \Rightarrow x = \frac{56 \times 14}{100} \text{ ton Fe}$$

روزهای چهارشنبه تا جمعه:

$$\frac{15 \times \frac{60}{100}}{160 \times 2} \times \frac{60}{100} = \frac{y}{56 \times 4} \Rightarrow y = \frac{27 \times 14}{100} \text{ ton Fe}$$

درنهایت آهن تولیدی در یک هفته محاسبه می‌شود:

$$\text{آهن تولیدی در یک هفته} = \frac{56 \times 14}{100} + \frac{27 \times 14}{100} = \frac{83 \times 14}{100} = \frac{83}{100} \times 14 = 11/62 \text{ ton Fe}$$

- با این راه می‌بینیم که محاسباتمان بسیار راحت‌تر می‌شود. (کمی از عددها باهم ساده می‌شوند) حتی در آخر هم نیاز نیست $14 \times \frac{83}{100}$ را حساب کنیم. باتوجه به گزینه‌ها واضح است که جواب گزینه "۳" می‌باشد.

نمودار انرژی واکنش $\text{H}^+(\text{aq}) + \text{OH}^-(\text{aq}) \rightarrow \text{H}_2\text{O}(\text{l})$ نشان‌دهنده گرماده بودن آن است؛ بنابراین واکنش برعکس آن یعنی واکنش یونش آب $\text{H}_2\text{O}(\text{l}) \rightarrow \text{H}^+(\text{aq}) + \text{OH}^-(\text{aq})$ گرماگیر خواهد بود. در دمای ۲۵ درجه حاصل‌ضرب غلظت هیدرونیوم و هیدروکسید برابر با ۱۴ است. در شرایط STP که دما صفر درجه است و باتوجه به گرماگیر بودن واکنش یونش آب، غلظت هیدرونیوم و هیدروکسید کمتر از 10^{-7} بوده و لذا مجموع $\text{pH} + \text{pOH} > 14$ خواهد بود. مقدار این مجموع در هر حجم ثابت خواهد بود (نادرستی گزینه ۴).

تمامی عبارتها به جز "ت" درست هستند.

بررسی نادرستی عبارت ت:

پلی‌اتن $\xrightarrow{\text{دما و فشار}}$ گاز اتن

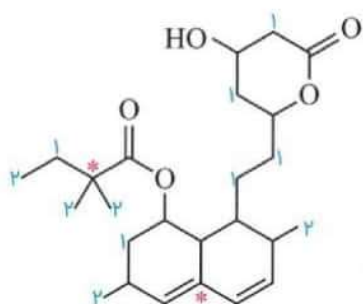
الف و ب) نمی‌توان گفت جرم مولی و تعداد الکترون‌ها بیشتر است یا کمتر. (نادرست)

ج) فلزهای دسته d تنوع اعداد اکسایش دارند؛ درحالی‌که فلزهای دسته s یک نوع عدد اکسایش دارند (درست)

د) واکنش‌پذیری فلزهای دسته d کمتر از فلزهای فعال دسته s است. (درست)

هـ) تعداد الکترون‌های ظرفیت دسته s حداکثر ۲ ولی تعداد الکترون‌های لایه ظرفیت فلزهای دسته d برابر با $ns + (n - 1)d$ است که بیشتر می‌باشد. (درست)

و) چگالی فلزهای واسطه (d) بیشتر از فلزهای دسته s است. (نادرست)



فرمول شیمیایی این ترکیب، $C_{25}H_{38}O_5$ است.

مورد اول: نادرست، دو اتم کربن، تنها به اتم‌های کربن متصل هستند که با علامت * مشخص شده‌اند.

مورد دوم: درست، این ترکیب دارای ۲۵ اتم کربن است که ۵ اتم کربن با اتم اکسیژن پیوند دارند.

$$\frac{5}{25} \times 100 = 20\%$$

مورد سوم: نادرست، تعداد گروه‌های CH_3 برابر ۶ است که با عدد ۱ مشخص شده‌اند و تعداد گروه‌های CH_3

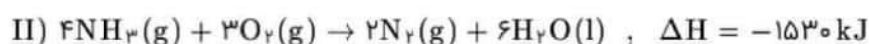
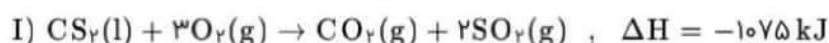
برابر ۵ است که با عدد ۲ مشخص شده‌اند.

مورد چهارم: نادرست، دو پیوند دوگانه کربن-کربن با دو مولکول هیدروژن یا چهار اتم هیدروژن به پیوند یگانه تبدیل می‌شود. شمار جفت الکترون‌های

ناپیوندی برابر ۱۰ است چون هر اتم اکسیژن دارای دو جفت الکترون ناپیوندی است. بنابراین شمار هیدروژن‌های اضافه شده برابر نصف جفت

الکترون‌های ناپیوندی نیست.

معادله واکنش‌ها را موازنه می‌کنیم:



$$1 \text{ g } NH_3 \times \frac{1 \text{ mol } NH_3}{17 \text{ g } NH_3} \times \frac{1530 \text{ kJ}}{4 \text{ mol } NH_3} = x \text{ g } CS_2 \times \frac{1 \text{ mol } CS_2}{76 \text{ g } CS_2} \times \frac{1075 \text{ kJ}}{1 \text{ mol } CS_2} \Rightarrow x = 1/59 \text{ g } CS_2$$

$$\text{گاز } N_2 = 1 \text{ mol } NH_3 \times \frac{2 \text{ mol } N_2}{4 \text{ mol } NH_3} = 0/5 \text{ mol } N_2$$

در بالن اول:

$$\text{حجم مخلوط گازی} = V_{N_2} + V_{O_2} + V_{Ar} \Rightarrow 1 = 0/7 + 6/5x + x$$

حجم گاز آرگون را x در نظر می‌گیریم.

$$\Rightarrow 0/3 = 7/5x \Rightarrow x = 0/04 \text{ L}$$

$$\%V_{O_2} = \frac{6/5 \times 0/04}{1} \times 100 = 48\%$$

در بالن دوم:

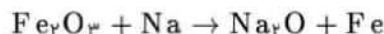
$$1 \text{ L} = V_{N_2} + V_{O_2} + V_{Ar} \Rightarrow 1 \text{ L} = \frac{5}{8} + \frac{5}{16} + V_{Ar}$$

$$V_{Ar} = \frac{1}{16} \text{ L} \xrightarrow{\times 100} = 6/25\%$$

$$\frac{\%O_2 \text{ بالن ۱}}{\%Ar \text{ بالن ۲}} = \frac{48}{6/25} = 4/16$$

بررسی عبارت‌ها:

مورد اول: نادرست. مثلاً تعداد تک‌الکترون نیتروژن برابر ۳ و تعداد تک‌الکترون فلئور برابر ۱ است، اما فلئور واکنش‌پذیری بیشتری دارد.
مورد دوم: درست. در عنصری که واکنش‌پذیری زیادی دارند، ترکیبات این عناصر از خود عناصر پایدارتر هستند. سدیم و پتاسیم نیز عنصری به شدت واکنش‌پذیر هستند که ترکیباتشان از خود آن‌ها واکنش‌پذیرتر است.
مورد سوم: درست. در واکنش‌های گرماده، پایداری فرآورده‌ها از واکنش‌دهنده‌ها بیشتر است. به واکنش گرماده زیر توجه کنید:



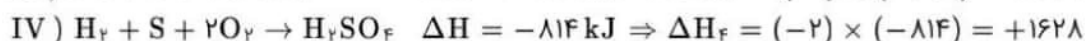
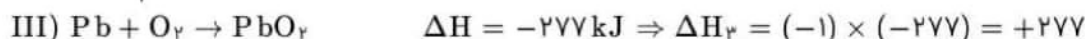
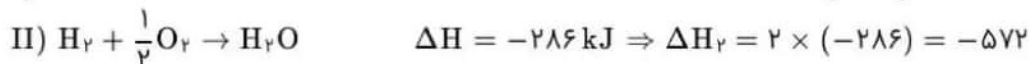
آهن واکنش‌پذیری کمتری از سدیم دارد؛ بنابراین ترکیب حاوی سدیم، در مقابل ترکیب حاوی آهن، پایدارتر است. پس این جمله درست است: همواره پایداری ترکیب حاوی فلز با واکنش‌پذیری کمتر، از پایداری ترکیب حاوی فلز واکنش‌پذیری بیشتر، کمتر است.
مورد چهارم: نادرست. در میان فلزات دسته S، برلیم کمترین شعاع و کمترین واکنش‌پذیری را دارد.

$$\text{pH} = 13 \Rightarrow [\text{H}^+] = 10^{-13} \Rightarrow [\text{OH}^-] = 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$10^{-1} \text{ mol.L}^{-1} \times 200 \text{ L} = 20 \text{ mol NaOH}$$

$$20 \text{ mol NaOH} \times \frac{40 \text{ g}}{1 \text{ mol}} \times \frac{100 \text{ g ناخالص}}{80 \text{ g NaOH}} = 1000 \text{ g}$$

برای رسیدن به واکنش کلی داده‌شده باید واکنش (I) را در ۲، واکنش (II) را در ۲، واکنش (III) را در ۱ و واکنش (IV) را در ۲ ضرب کنیم:

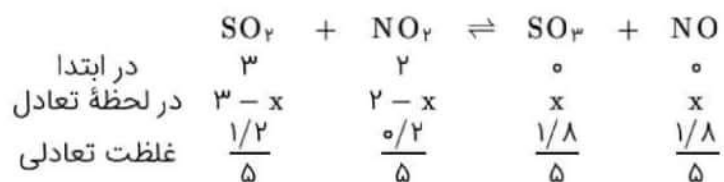


بنابراین ΔH واکنش کلی داده‌شده برابر می‌شود با:

$$\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2 + \Delta H_3 + \Delta H_4 = (-1836) + (-572) + 277 + 1628 \Rightarrow \Delta H = -503 \text{ kJ}$$

دقت داشته باشید سؤال گرما را به ازای مصرف ۱۰۳۵ گرم سرب (Pb) خواسته است.

$$\text{گرما} = 1035 \text{ g Pb} \times \frac{1 \text{ mol Pb}}{207 \text{ g Pb}} \times \frac{-503 \text{ kJ}}{1 \text{ mol Pb}} = -2515 \text{ kJ}$$



$$2 \times \frac{10}{100} = 0/2 \quad \Rightarrow \text{باقی مانده} \quad 2-x = 0/2 \Rightarrow x = 1/8$$

$$K = \frac{\frac{1/8}{5} \times \frac{1/8}{5}}{\frac{1/2}{5} \times \frac{0/2}{5}} = \frac{3/24}{0/24} = 13/5$$

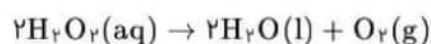
SO_3 به دلیل جرمی بیشتر، درصد جرمی بیشتری دارد.

$\text{I}^-(\text{aq})$ کاتالیزگر واکنش تجزیه آب اکسیژنه است و حذف آن تأثیری در مقدار تولید نهایی فرآورده ندارد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه ۱:

$$3 \text{ mol} \times \frac{75}{100} = \frac{9}{4} \quad \text{میزان تجزیه آب اکسیژنه}$$



$$? \text{ L O}_2 = \frac{9}{4} \text{ mol H}_2\text{O}_2 \times \frac{1 \text{ mol O}_2}{2 \text{ mol H}_2\text{O}_2} \times \frac{22/4 \text{ L O}_2}{1 \text{ mol O}_2} = 25/2 \text{ L O}_2$$

گزینه ۲: واکنش در حلال آب انجام می‌شود و با تولید آب در واکنش به تعداد مول‌های آب موجود در ظرف افزوده می‌شود.

گزینه ۳: چون ضریب استوکیومتری آب اکسیژنه دو برابر ضریب استوکیومتری اکسیژن است که دارای ضریب ۱ است و سرعت واکنش با سرعت گونه از واکنش برابر است که ضریب ۱ دارد.

$$\overline{R}_{\text{واکنش}} = \overline{R}_{\text{O}_2} = \frac{1}{2} \overline{R}_{\text{H}_2\text{O}_2}$$